Zinseszinsrechnen

Werden im Gegensatz zur normalen Zinsrechnung die Zinsen nach einer Verzinsungsperiode (z.B. 1 Jahr) nicht ausgezahlt (bzw. beim Kredit eingefordert), sondern dem Kapital hinzugerechnet, so werden sie in der folgenden Verzinsungsperiode mit verzinst (**Zinseszinsen**). Das um die Zinsen erhöhte Kapital bildet dann die Grundlage der Zinsberechnung im folgenden Zeitabschnitt. Im Regelfall werden die Zinsen am Ende eines Zeitabschnitts berechnet und dem Kapital hinzugerechnet. Man spricht dann von einer **nachschüssigen bzw. dekursiven Verzinsung**.

Beispiel:

Auf welchen Betrag wachsen € 3000,00 in 4 Jahren bei einem Zinssatz von 6% an, wenn die Zinsen am Ende eines jeden Jahres dem jeweiligen Kapital zugerechnet werden? Wie groß ist das Kapital nach n Jahren?

1. Jahr: $K_1 = K_0 + K_0 * \frac{p}{100} = K_0 * \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 * q$ mit $q = 1 + \frac{p}{100}$

2. Jahr: $K_2 = K_1 + K_1 * \frac{p}{100} = K_1 * \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_1 * q = (K_0 * q) * q = K_0 * q^2$

3. Jahr: $K_3 = K_2 + K_2 * \frac{p}{100} = K_2 * \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_2 * q = (K_0 * q^2) * q = K_0 * q^3$

4. Jahr: $K_4 = K_3 + K_3 * \frac{p}{100} = K_3 * \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_3 * q = (K_0 * q^3) * q = K_0 * q^4$

Demnach muss also nach n Jahren das Kapital $K_n = K_0 * q^n$ sein. Daraus ergibt sich

die **Zinseszinsformel** zu: $\boxed{K_n = K_0 * q^n}$, wobei $\boxed{q^n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$ **Aufzinsungsfaktor**

heißt.

Der Exponent ***n*** steht dabei für die Anzahl der Verzinsungszeiträume. Dabei ist die Dauer eines einzelnen Verzinsungszeitraums eigentlich beliebig, er muss lediglich mit dem Bezugszeitraum des Zinssatzes übereinstimmen. Im allgemeinen ist daher ***n*** gleichzusetzen mit ***t***.

Bezieht sich ***t*** auf ein ganzes Jahr, dann ist für ***n*** die Anzahl der Jahre, über die verzinst werden soll, einzusetzen. Sind Monats- oder Tageszinsen zu berechnen, ist der Zeitraum (und damit auch ***n***) durch den entsprechenden Bruch $\frac{m}{12}$ ***bzw.*** $\frac{d}{360}$ zu ersetzen, wobei ***m*** für die Anzahl der Monate und ***d*** für die Anzahl der Tage steht.

Berechnung des Barwertes, des Zinssatzes und der Zeit bei jährlichen Abständen

Der Anfangswert K_0 bezeichnet man als **Barwert** oder **Gegenwartswert** des Kapitals K_n. Die Berechnung des Barwertes nennt man Diskontierung. Das Endkapital K_n wird also um n Jahre diskontiert bzw. abgezinst.

Die Berechnung des Barwertes kann man auch mit Hilfe des **Abzinsungsfaktors** $\boxed{v^n = \frac{1}{q^n}}$ durchführen. Statt $K_0 = \frac{K_n}{q^n}$ rechnet man dann $K_0 = K_n * v^n$. Dank moderner Taschenrechner bringt der Abzinsungsfaktor allerdings keinerlei Vorteile.

Durch Umwandlung der Zinseszinsformel können auch die Zeit und der Zinssatz errechnet werden:

Berechnung des Zinssatzes

$K_n = K_0 * q^n$ 1. Schritt: Teilen durch K_0

$\frac{K_n}{K_0} = q^n$ 2. Schritt: n-te Wurzel ziehen

$\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} = q = 1 + \frac{p}{100}$ 3. Schritt: -1

$\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 = \frac{p}{100}$ 4. Schritt: mit 100 multiplizieren

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1\right) * 100 = p}$$

Berechnung der Zeit:

$K_n = K_0 * q^n$ 1. Schritt: Teilen durch K_0

$\frac{K_n}{K_0} = q^n$ 2. Schritt: Logarithmieren

$$\boxed{n = \frac{\lg K_n - \lg K_0}{\lg q}}$$

Damit sind alle Berechnungen von Kapitalien sowie der Verzinsungszeit und des Zinssatzes möglich. Der Index **n** (= Verzinsungszeitraum) wird normalerweise in Jahren angegeben. **n** steht aber eigentlich für die Anzahl der Verzinsungsabschnitte. Sind andere Verzinsungsabschnitte als Jahre zu berechnen, so ist zunächst der auf diesen Zeitabschnitt zutreffende **angepasste Zinssatz** zu ermitteln (siehe Vorlage Zinsrechnung).