

# Quadratische Funktionen (I)

## Einführung

Im Gegensatz zur linearen Funktion gibt es insgesamt vier Varianten quadratische Funktionen:

$$f : x \mapsto x^2$$

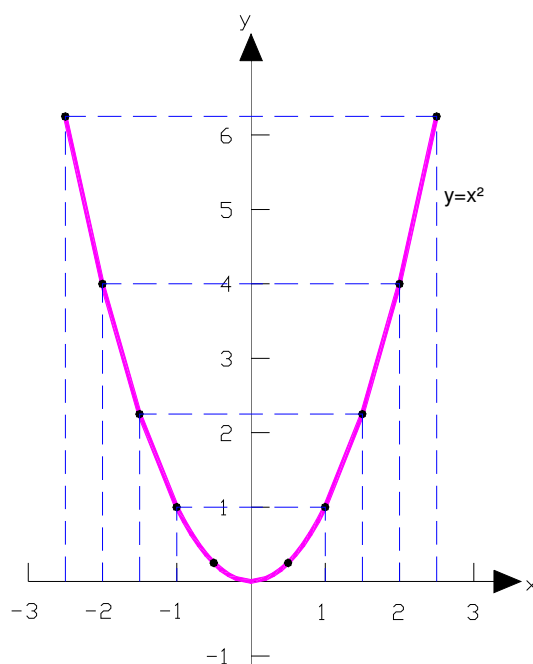
$$f : x \mapsto ax^2$$

$$f : x \mapsto ax^2 + c$$

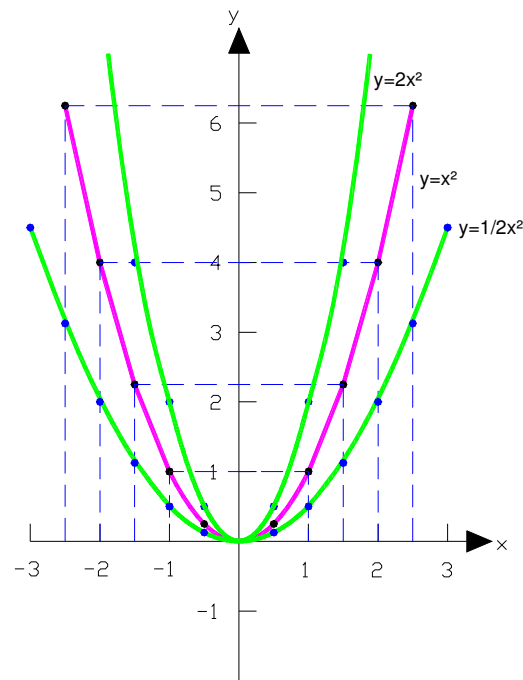
$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

## Grafische Darstellung

Der Graph der Quadratfunktion  $x \mapsto x^2$  ( $x \in \mathbb{Q}$ ) stellt eine Normalparabel dar, deren Scheitelpunkt im Ursprung eines Achsenkreuzes liegt und deren beide Äste symmetrisch bezüglich der y-Achse sind:



Wird in die Funktion der Normalparabeln ein Faktor  $a$  eingeführt, dann werden die Parabeläste gedehnt oder gestaucht, je nachdem der Faktor größer oder kleiner 1 ist. Es gilt also:



Der Graph der Funktion  $x \mapsto ax^2$ , ( $a \in \mathbb{R}^*$ ), ist eine gedehnte oder gestauchte Normalparabel.  $a > 1$  bedeutet Dehnung,  $0 < a < 1$  bewirkt Stauchung längs der y-Achse.  $a = 1$  ist die Normalparabel. Bei  $a < 0$  wird die Parabel an der x-Achse gespiegelt.

Ähnlich wie bei der linearen Funktion wird durch einen Summanden in der Funktion nach dem Schema  $x \mapsto ax + c$  die Parabel auf der y-Achse verschoben. Ist  $c > 0$ , wird die Parabel nach oben verschoben, bei  $c < 0$  nach unten. Bei  $c = 0$  geht der Scheitelpunkt der Parabel durch den Ursprung des Achsenkreuzes und ergibt somit wieder eine Form der Normalparabel.

In der Funktion  $x \mapsto ax^2 + c$ , ( $c \in \mathbb{R}^*$ ), gibt der Summand  $c$  die Verschiebung einer Parabel entlang der y-Achse eines Koordinatenkreuzes und damit die Lage des Scheitelpunktes der Parabel an.  $c = 0$  bedeutet, dass der Scheitelpunkt auf der x-Achse liegt.  $x \mapsto x^2 + c$  ist eine Normalparabel, deren Scheitelpunkt auf der y-Achse in der Höhe  $c$  liegt. Bei  $x \mapsto ax^2 + c$  ist die Parabel zusätzlich gedehnt oder gestaucht.

Die Grundform der quadratischen Funktion lässt sich durch einen unmittelbar an der Variablen  $x$  ansetzenden Summanden variieren. Bei  $x \mapsto (x - b)^2$  wird die Parabel entlang der x-Achse verschoben und zwar für  $b > 0$  nach rechts und für  $b < 0$  nach links. Beachte dabei: Für  $b > 0$  lautet die Funktion  $x \mapsto (x - b)^2$ , für  $b < 0$  lautet die Funktion  $x \mapsto (x + b)^2$ !

Die Einbeziehung des Dehnungsfaktors  $a$  hat die gleiche Wirkung wie zuvor beschrieben: Die Funktion lautet dann  $x \mapsto a(x - b)^2$ . Die Einbeziehung von  $c$  bewirkt eine zusätzliche Verschiebung in Richtung der y-Achse (s.o.). Die Funktion

lautet dann  $x \mapsto a(x - b)^2 + c$ .

Alle Funktionen der vorgenannten Formen lassen sich entsprechend den bereits kennengelernten Regeln (siehe lineare Funktionen) in Funktionsgleichungen umstellen. Bsp.:  $x \mapsto a(x - b)^2 + c \Rightarrow y = a(x - b)^2 + c$ .

### Scheitelpunktform der Parabelgleichung

Über die Funktionsgleichung  $y = a(x - x_0)^2 + y_0$  lassen sich die Koordinaten des Scheitelpunktes der Parabel bestimmen. Diese Gleichung bezeichnet man daher als **Scheitelpunktform der Parabelgleichung**. Um in einer quadratischen Funktionsgleichung  $y = ax^2 + bx + c$  die Koordinaten des Scheitelpunktes bestimmen zu können, bringt man sie auf deren Scheitelpunktform  $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ . Dazu ist zur Gleichung die quadratische Ergänzung zu addieren.

Gemäß den Regeln der binomischen Formel lässt sich ein Gleichungsterm  $(a + b)^2$  auflösen zu  $a^2 + 2ab + b^2$  bzw.  $(a - b)^2$  zu  $a^2 - 2ab + b^2$ . Man kann Ähnlichkeiten zwischen der quadratischen Funktionsgleichung der Parabel zur Auflösung der binomischen Formel erkennen. Der Dehnungsfaktor  $a$  und die Achsenverschiebung  $c$  bleiben zunächst unberücksichtigt. Wir erhalten dann einen Restterm  $x^2 + bx$ .

Übertragen auf die binomische Formel können wir definieren:  $a^2 = x^2$ . Damit gilt auch  $a = x$ . Wollen wir in der binomische Formel  $b$  extrahieren, so müssen wir durch  $2a$  teilen:  $\frac{2ab}{2a} = b$ . Übertragen auf unseren Restterm bedeutet dies:  $\frac{bx}{2x} = \frac{b}{2}$ .

Daraus folgt:  $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$ .

Die quadratische Ergänzung zu  $x^2 + bx$  ist also gleich dem Quadrat des halben Koeffizienten von  $x$ .

Setzen wir diese Erkenntnisse auf die vollständige quadratische Parabelgleichung um, so erhalten wir:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = ax^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

$$y = ax^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Angewendet auf die Scheitelpunktform der Parabelgleichung erhalten wir folgende Koordinaten für den Scheitelpunkt  $\mathbf{S}(x_0 | y_0)$ :

$$x_0 = -\frac{b}{2}; y_0 = c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \text{ und somit } \mathbf{S}\left(-\frac{b}{2} \mid c - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right).$$

Die Scheitelpunktkoordinaten einer Parabel mit der Gleichung  $y = ax^2 + bx + c$  geben bei  $a > 0$  für genau einen x-Wert den kleinsten Funktionswert  $f(x) = y$  an. Bei  $a < 0$  (d.h. die Parabel ist nach unten geöffnet) gehört zum x-Wert der größte Funktionswert  $f(x) = y$ .

Den **kleinsten** Funktionswert bezeichnet man als **Minimum** einer Funktion, den **größten** Funktionswert als **Maximum**.

Minimum und Maximum spielen bei vielen technischen und ökonomischen Berechnungen eine große Rolle (Bsp.: höchster Sonnenstand, Flutmaximum bzw. Flutscheitel, maximales Drehmoment, Gewinnmaximum, Kostenminimum, etc.).