Potenzen

Vorbemerkungen

Potenzen sind Zahlen, die ein- oder mehrfach mit sich selbst multipliziert werden. Die Anzahl, wie oft dabei eine Zahl mit sich selbst multipliziert wird, nennt man Exponent, die Zahl selbst heißt Basis. Der Exponent wird in einigen Fällen auch Dimension genannt.

Also gilt:

$$\boldsymbol{a^n = a \bullet a \bullet a \bullet \ldots \bullet a} \quad (\boldsymbol{n}\ \textbf{Faktoren}, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N})$$

Basis **Exponent**

Man sagt, die Basis ***a*** trägt den Exponenten ***n*** bzw. hat die Dimension ***n***. Das Ergebnis nennt man Potenzwert.

Beispiele:

$5^4 = 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 = 625 \qquad 16^3 = 16 \bullet 16 \bullet 16 \bullet 16 = 4096 \qquad 2^8 = 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 = 256$

Rechnen mit Potenzen

Ist die Basis negativ (z.B. –2), so ist der Potenzwert bei geradzahligen Exponenten stets positiv, bei ungeradzahligen Exponenten stets negativ!

Beispiel:

$-3^4 = +81 \qquad -3^7 = -2187$

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis

Werden zwei oder mehrere Potenzen mit gleicher Basis miteinander multipliziert, so werden deren Exponenten addiert:

$$\boxed{\boldsymbol{a^n \bullet a^m = a^{n+m}}}$$

Beispiele:

$5^2 \bullet 5^3 = 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 \bullet 5 = 5^{2+3} = 5^5 = 3125 \qquad 2^3 \bullet 2^5 \bullet 2^8 = 2^{3+5+8} = 2^{16} = 65536$

Werden umgekehrt Potenzen mit gleicher Basis dividiert, so werden deren Exponenten subtrahiert:

$$\boxed{\boldsymbol{a^n / a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}}$$

Beispiele:

$5^3 / 5^2 = \frac{5 \bullet 5 \bullet 5}{5 \bullet 5} = 5^{3-2} = 5^1 = 5 \qquad 2^8 / 2^5 = \frac{2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2}{2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2} = \frac{2^8}{2^5} = 2^{8-5} = 2^3 = 8$

Multiplikation und Division von Potenzen mit gleichem Exponenten

Werden Potenzen mit gleichem Exponenten miteinander multipliziert, so werden deren Basen miteinander multipliziert:

$$\boxed{a^n \bullet b^n = (a \bullet b)^n}$$

Beispiel:

$$5^3 \bullet 2^3 = 5\bullet5\bullet5\bullet2\bullet2\bullet2 = 5\bullet2\bullet5\bullet2\bullet5\bullet2 = (5\bullet2)^3 = 10^3 = 1000$$

Werden umgekehrt Potenzen mit gleichem Exponenten durcheinander dividiert, so dividiert man deren Basen und potenziert den Quotienten mit dem gemeinsamen Exponenten:

$$\boxed{a^n / b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$$

Beispiel:

$$6^3 / 2^3 = (6\bullet6\bullet6)/(2\bullet2\bullet2) = \frac{6\bullet6\bullet6}{2\bullet2\bullet2} = \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 3^3 = 27$$

Potenzieren von Potenzen

Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten miteinander multipliziert:

$$\boxed{\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} \quad (a \in \mathbb{R}; n, m \in \mathbb{N})}$$

Beispiele:

$$\left(2^3\right)^2 = 2^{3\cdot2} = 2^6 = 64 \qquad \left(5^2\right)^5 = 5^{2\cdot5} = 5^{10} = 9765625$$

Potenzen mit ganzzahligem negativem Exponenten und dem Exponenten 0

Wenden wir die vorgenannten Regeln konsequent an, dann erhalten wir einen negativen Exponenten, sobald bei einer Division von Potenzen mit gleicher Basis der Exponent des Divisors größer ist als der des Dividenden.

Beispiel:

$$2^2 / 2^6 = 2^{2-6} = 2^{-4}$$

Dafür können wir auch kürzer schreiben: $2^{-4} = \frac{2^2}{2^6} = \frac{2\bullet2}{2\bullet2\bullet2\bullet2\bullet2\bullet2} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$. Also gilt:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Dividieren wir eine Potenz durch sich selbst, so ist dies gleichbedeutend mit der Division zweier Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten. Die Subtraktion zweier gleicher Zahlen ergibt als Ergebnis 0 (z.B. 4-4=0). Wir wissen, dass die Division einer Zahl durch sich selbst als Ergebnis immer 1 ergibt. Das gilt natürlich auch für die Potenzrechnung:

$$\boxed{\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1}$$

Beispiel:

$$\frac{5^8}{5^8} = 5^{(8-8)} = 5^0 = 1$$

Definition:

Durch die Festsetzung: $a^0 = 1; a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ $(a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ *wird der Potenzbegriff wie folgt erweitert:*

1. *Jede Potenz mit dem Exponenten 0 hat den Wert 1:*
   $a^0 = 1;\ 3^0 = 1;\ 0{,}3^0 = 1;\ \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$

2. *Jede Potenz mit negativem ganzzahligem Exponenten ist gleich dem Kehrwert ihrer Basis mit positivem ganzzahligem Exponenten:*
   $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n;\ 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3;\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$

Wurzeln

Das Rechnen mit Wurzeln ist gleichbedeutend mit der Potenzrechnung mit rationalen, also gebrochenen, Exponenten. Das Rechnen mit Wurzeln wird auch **Radizieren** genannt. Dabei gelten folgende Namenskonventionen:

Potenzrechnung	**Wurzelrechnung**
$a^5 = 32 \rightarrow$ ***Potenzwert***	$\Leftrightarrow \quad \sqrt[5]{32} = a \rightarrow$ ***Wurzel(wert)***
Basis ***Exponent***	***Wurzelexponent/ Dimension*** ***Radikand***

Statt Wurzelwert wird häufig auch der Begriff „Wurzel“ für den Wert einer Wurzel verwendet. Der Wurzelexponent 2 wird meistens dem Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$ gleichgesetzt und daher nicht mehr ausgeschrieben. In diesem Fall spricht man von einer quadratischen Wurzel oder Quadratwurzel.

Definition:

Die Wurzel einer Zahl ist der Wert, der mit dem Wurzelexponenten potenziert den Radikand ergibt:

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$$

Für a=0 ist $\sqrt[n]{0} = 0$; für a<0 ist $\sqrt[n]{a}$ nicht definiert!

Die Wurzelrechnung bzw. das Radizieren ist nach dieser Definition nichts anderes als die Umkehrung der Potenzierung. Demzufolge gelten auch die gleichen Rechenvorschriften bzw. Regeln wie beim Potenzieren, nur eben in ihrer Umkehrung.

Beispiel:

$$\sqrt[3]{a^6} = a^{6:3} = a^{\frac{6}{3}} = a^2 \qquad \sqrt[24]{a^6} = a^{\frac{6}{24}} = a^{\frac{1}{4}}$$

Lässt sich der Exponent des Radikanden nicht ganzzahlig durch die Dimension der Wurzel teilen, so erhält man einen gebrochenen bzw. rationalen Exponenten in der Exponentialdarstellung der Wurzel. Jede Wurzel kann insofern in eine Potenz mit rationalem Exponenten umgewandelt werden:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$
$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$
$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{-\frac{1}{n}}$$
$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = a^{-\frac{m}{n}}$$

Umgekehrt kann auch jede Potenz mit rationalem Exponenten als Wurzel geschrieben werden!

Gemäß den Regeln bei der Potenzierung lassen sich folgende Regeln für das Rechnen mit Wurzeln ableiten:

1. $\sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
2. $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a$
4. $\sqrt[n]{a^{nm}} = \sqrt[n]{\left(a^m\right)^n} = a^m \;\Leftrightarrow\; \sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m}} = \sqrt[n]{a}$
5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Definitionen hierzu:

1. *Werden Wurzeln gleicher Dimension miteinander multipliziert, so werden die Radikanden multipliziert, und die Dimension der Wurzel wird beibehalten.*
2. *Werden Wurzel gleicher Dimension dividiert, so werden die Radikanden dividiert, und die Dimension der Wurzel wird beibehalten.*
3. *Wird eine Wurzel potenziert, so wird der Radikand potenziert, und die Dimension der Wurzel wird beibehalten. Die Potenzierung einer Wurzel mit ihrer eigenen Dimension löst die Wurzel auf und ergibt als Ergebnis den Wert des Radikanden.*
4. *Ist die Potenz des Radikanden ein Vielfaches der Wurzeldimension, so kann durch Kürzen die Wurzel aufgelöst werden. Ist umgekehrt die Dimension einer Wurzel ein Vielfaches der Potenz des Radikanden, so kann durch Kürzen die Potenz aufgelöst werden.*
5. *Beim Radizieren einer Wurzel können die Dimensionen beider Wurzel miteinander multipliziert und damit die Wurzeln zusammengefasst werden.*

Logarithmen

Das Rechnen mit Logarithmen hängt eng mit dem Potenzieren und Radizieren zusammen: Beim Potenzieren wird zu einer gegebenen Basis und einem gegebenen Exponenten der Potenzwert gesucht; beim Radizieren sind Potenzwert und Exponent (Dimension) bekannt, und es wird die Basis (Wurzelwert) gesucht.

Sind nun sowohl die Basis als auch der Potenzwert bekannt und wird der Exponent gesucht, dann ist das Ergebnis der **Logarithmus**:

$$2^{x} = 32 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x} = log_{2} 32$$

Logarithmus **Basis** **Numerus**

Die Gleichung $\boldsymbol{x} = log_{\boldsymbol{n}}\, \boldsymbol{a}$ liest man: x gleich Logarithmus a zur Basis n. Der Logarithmus entspricht in der Potenzrechnung dem Exponenten, der Numerus dem Potenzwert.

Das Logarithmieren ist also ebenso wie das Radizieren eine Umkehrung des Potenzierens! Dabei gelten folgende Vorschriften:

Definition:

Der Logarithmus einer Zahl b zur Basis a ist derjenige Exponent, mit dem man a potenzieren muss, um b zu erhalten.

$$\boxed{log_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}, \textbf{wenn}\; \boldsymbol{a}^{x} = \boldsymbol{b}}$$

Also gilt auch:

$$\begin{array}{l} log_{2} 8 = 3, \quad \textbf{weil}\; 2^{3} = 8 \\ log_{2} 2 = 1, \quad \textbf{weil}\; 2^{1} = 2 \quad \Rightarrow \quad log_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{a} = 1, \quad \textbf{weil} \quad \boldsymbol{a}^{1} = \boldsymbol{a} \\ log_{2} 1 = 0, \quad \textbf{weil}\; 2^{0} = 1 \quad \Rightarrow \quad log_{\boldsymbol{a}} 1 = 0, \quad \textbf{weil} \quad \boldsymbol{a}^{0} = 1 \end{array}$$

Achtung: ***Logarithmus x*** $\in \mathbb{R}$ *; der Logarithmus kann auch eine irrationale Zahl sein!*

Rechnen mit Logarithmen - Logarithmensätze

Ebenso wie beim Potenzrechnen und Radizieren, gibt es beim Rechnen mit Logarithmen Regeln, die zu beachten sind, die aber auch den Umgang mit Logarithmen vereinfachen. Dabei sind zunächst einmal 4 Logarithmensätze zu definieren:

Satz 1:

Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen jedes einzelnen Faktoren:

$$\boxed{\log(\mathbf{ab}) = \log \mathbf{a} + \log \mathbf{b}}$$

Satz 2:

Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz der Logarithmen aus Zähler und Nenner:

$$\boxed{\log\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right) = \log \mathbf{a} - \log \mathbf{b}}$$

Satz 3:

Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten und dem Logarithmus der Potenzbasis:

$$\boxed{\log\left(\mathbf{a}^n\right) = \mathbf{n} \bullet \log \mathbf{a}}$$

Satz 4:

Für den Logarithmus einer lässt sich entsprechend der Regeln für das Radizieren in der Potenzform der Wurzel ein Sonderfall von Satz 3 ableiten.

$$\boxed{\log\left(\sqrt[n]{\mathbf{a}}\right) = \log\left(\mathbf{a}^{\frac{1}{n}}\right) = \tfrac{1}{n} \bullet \log \mathbf{a}}$$

Beispiele:

$\log(\mathbf{xy}) = \log \mathbf{x} + \log \mathbf{y}$ $\qquad \log(2 \bullet 9) = \log 2 + \log 9 = 0{,}3010 + 0{,}9542 = 1{,}2552$

$\log\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right) = \log \mathbf{a} - \log \mathbf{b}$ $\qquad \log\left(\frac{3}{2}\right) = \log 3 - \log 2 = 0{,}4771 - 0{,}3010 = 0{,}1760$

$\log\left(\frac{5}{8}\right) = \log 5 - \log 8 = 0{,}69897 - 0{,}90309 = -0{,}20412$

$\log\left(\mathbf{x}^{\mathbf{y}}\right) = \mathbf{y} \bullet \log \mathbf{x}$ $\qquad \log\left(2^8\right) = 8 \log 2 = 8 \bullet 0{,}3010 = 2{,}408$

$\log\left(\sqrt[y]{\mathbf{x}}\right) = \tfrac{1}{y} \bullet \log \mathbf{x}$ $\qquad \log\left(\sqrt[3]{32}\right) = \tfrac{1}{3} \log 32 = \tfrac{1}{3} \bullet 1{,}5051 = 0{,}5017$

Zehnerlogarithmen

Einen Logarithmus zur Basis 10 nennt man Zehnerlogarithmus, dekadischen Logarithmus oder Briggschen Logarithmus (nach Henry Briggs, der 1624 als erster eine wenn auch unvollständige Tabelle von Zehnerlogarithmen herausgab). Für $\log_{10} \mathbf{a}$ schreibt man kurz $lg\, \mathbf{a}$. Abweichend davon ist im Bereich der Informatik, insbesondere bei der Kennzeichnung der Logarithmusfunktion auch die allgemeine Schreibweise $\log \mathbf{a}$ gebräuchlich.

Zehnerlogarithmen dienen der Vereinheitlich von Logarithmen in der mathematischen Anwendung bei der Lösung anwendungsorientierter Aufgaben, z.B. in der Finanzmathematik (vgl. Zinseszinsrechnung!).

Grundsätzlich gilt: Wenn der Numerus größer wird, wird auch der Wert des Logarithmus größer!

Für den Numerus $\boldsymbol{a} \leq 0$ ist der Logarithmus nicht definiert!

Definition:

Für $\boldsymbol{x} \rangle 1$ *ist* $lg\, \boldsymbol{x} \rangle 0$.

Für $0 \langle \boldsymbol{x} \langle 1$ *ist* $lg\, \boldsymbol{x} \langle 0$.

Für $\boldsymbol{x} = 1$ *ist* $lg\, \boldsymbol{x} = 0$.

Für $\boldsymbol{x} \leq 0$ *ist* $lg\, \boldsymbol{x}$ *nicht definiert.*