Mathematische Grundregeln

1. **Reihenfolge der Rechenoperationen beachten:**
   - höchste Priorität: *Klammerausdrücke*
   - danach: *Potenzen*
   - danach: *Punktrechenoperationen (* und / sowie Brüche)*
   - zuletzt: *Strichrechenoperationen (+ und -)*
2. **Beim Umstellen von Gleichungen gilt die umgekehrte Reihenfolge, also:**
   - zuerst: *Strichrechenoperationen (+ und -) auflösen*
   - danach: *Punktrechenoperationen (* und / sowie Brüche) auflösen*
   - danach: *Potenzen auflösen*
   - zuletzt: *Klammerausdrücke auflösen*
3. **Werden Gleichungen umgeformt, dann sind alle Schritte auf beiden Seiten der Gleichung durchzuführen!**
4. **Jede beliebige Zahl geteilt durch sich selbst ergibt 1. (Beispiele:** $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}} = 1; \quad \frac{5}{5} = 1$ **)**
5. **Jede beliebige Potenz mit dem Exponenten 1 hat als Ergebnis den Wert der Basis. (Beispiele:** $5^1 = 5; \quad \boldsymbol{a}^1 = \boldsymbol{a}$ **)**
6. **Jede beliebige Potenz mit dem Exponenten 0 ist gleich 1. (Beispiele:** $5^0 = 1; \quad \boldsymbol{a}^0 = 1; \quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^0 = 1$ **)**
7. **Wird ein Ausdruck in Klammern mit einem Faktor multipliziert bzw. durch einen Divisor dividiert, so sind alle Elemente dieser Klammer mit dem Faktor zu multiplizieren bzw. durch den Divisor zu dividieren. (Beispiel:** $3 \bullet (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}) = 3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$ **)**
8. **Werden zwei Klammerausdrücke miteinander multipliziert, so müssen alle Elemente der einen Klammer mit jedem Element der anderen Klammer multipliziert werden. (Beispiel:**
   $$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \bullet (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ba} + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$$
   $$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \bullet (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{bx} - \boldsymbol{ay} - \boldsymbol{by}$$
)
9. **Werden zwei Zahlen bzw. Variablen mit einem Wert kleiner 0 (negativ!) miteinander multipliziert, so ist das Ergebnis grundsätzlich positiv. Das Gleiche gilt ebenso für die Division.**
10. **Wird eine positive Zahl (Wert > 0) mit einer negativen Zahl multipliziert bzw. durch diese dividiert (oder umgekehrt), so ist das Ergebnis immer negativ.**
11. **Werden zwei geradzahlige Werte miteinander multipliziert oder durcheinander dividiert, so ist das Ergebnis ebenfalls geradzahlig (durch 2 teilbar).**

12. **Werden zwei ungeradzahlige Werte miteinander multipliziert bzw. durcheinander dividiert, so ist das Ergebnis ebenfalls ungeradzahlig (nicht durch 2 teilbar).**
13. **Wird ein geradzahliger Wert mit einem ungeradzahligen Wert multipliziert, so ist das Ergebnis stets geradzahlig.**
14. **Wird ein ungeradzahliger Wert durch einen geradzahligen Wert dividiert, so ist das Ergebnis nie eine natürliche (ganze) Zahl.**
15. **Wird ein geradzahliger Wert durch einen geradzahligen Wert dividiert, so ist das Ergebnis immer eine natürliche (ganze) Zahl.**
16. **Beim Kehrwert einer Zahl wird 1 durch diese Zahl dividiert. (Beispiel: Der Kehrwert von 3 ist $\frac{1}{3}$, der Kehrwert von x ist $\frac{1}{\boldsymbol{x}}$)**
17. **Schreibkonventionen bei Rechenoperationen:**
    - **Das Multiplikationszeichen „•“ muss vor Variablen nicht gesetzt werden. (Beispiel: $3\bullet \boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{a}\bullet \boldsymbol{b} = \boldsymbol{ab}$; $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\bullet(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$)**
    - **Der Multiplikator (Faktor) 1 muss nicht geschrieben werden (also: $1\bullet 5 = 5$; $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$)**
    - **Jede große Zahl kann als Dezimalbruch multipliziert mit einer entsprechenden Zehnerpotenz geschrieben werden. (Beispiel: $153000000 = 1{,}53\bullet 10^8$)**
    - **Jeder Bruch kann auch als Potenz geschrieben werden. (Beispiel: $\frac{1}{5} = 5^{-1}$; $\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2}$; $\frac{3}{8} = 3\bullet 8^{-1} = \frac{3}{2^3} = 3\bullet 2^{-3}$)**
18. **Oberstes Gebot ist, bei komplexeren Rechenaufgaben die Reihenfolge der Ausführung durch entsprechende Klammersetzung zu unterstreichen. Lieber eine Klammer zuviel setzen als eine Klammer zuwenig! Dies gilt insbesondere auch beim Potenzieren. (Beispiele: $\boldsymbol{ab}^2 = \boldsymbol{a}\bullet(\boldsymbol{b}^2)$ und ist damit etwas anderes als $(\boldsymbol{ab})^2 = \boldsymbol{a}^2\bullet \boldsymbol{b}^2$,**
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{ax}-\boldsymbol{bx}+\boldsymbol{ay}-\boldsymbol{by})\\ &= \boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{ax}+\boldsymbol{bx}-\boldsymbol{ay}+\boldsymbol{by}\end{aligned}$$
. Beachte hierbei: Wir eine negative Zahl bzw. Variable subtrahiert, so wird ihr Wert addiert!)
19. **Darstellung großer Zahlen im Taschenrechner:**
Überschreitet die Größe eines Ergebnisses die maximale Ziffernanzahl (meistens 8-10 Stellen) des Displays eines Taschenrechners, so wird sie Zehnerpotenz dargestellt (vgl. Nr. 17!). (Beispiel: 143589764392 wird dargestellt als $1{,}43589764392_{11}$ **oder** 1,43589764392E11**. Dies ist gleichbedeutend mit** $1{,}43589764392\bullet 10^{11}$**; 0,000009548 wird dargestellt als** $9{,}548_{-6}$ **oder** 9,548E-6**. Dies ist gleichbedeutend mit** $9{,}548\bullet 10^{-6} = \frac{9{,}548}{10^6}$**. Man könnte auch sagen, das Dezimalkomma wird um so viele Stellen nach**

rechts (positiver Exponent) oder links (negativer Exponent) verschoben, wie der Wert des Exponenten vorschreibt.

Beispiele:

Zu 1: $4^3 + 5 \bullet 2 \bullet (6-3) = 58 + 10 \bullet 3 = 58 + 30 = 80$

$$3^{(5-2)} + 6 \bullet 3 + 3 \bullet (8-3)^2 - 23 = 3^3 + 18 + 3 \bullet 5^2 - 23 = 27 + 18 + 3 \bullet 25 - 23$$
$$= 22 + 75 = 99$$

Zu 2: Berechnen Sie y für x=5 in folgender Gleichung:

$$3\boldsymbol{y} - 19 = 4\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{x} - 30 \qquad | +18$$
$$3\boldsymbol{y} = 4\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{x} - 11 \qquad | : 3$$
$$\boldsymbol{y} = \frac{(4\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{x} - 11)}{3} = \frac{(4 \bullet 5^2 + 2 \bullet 5 - 11)}{3} = \frac{(4 \bullet 25 + 10 - 11)}{3} = \frac{(100 - 1)}{3} = \frac{99}{3} = 33$$

alternativ geht auch für Zeile 3:

$$\boldsymbol{y} = \frac{4\boldsymbol{x}^2}{3} + \frac{2\boldsymbol{x}}{3} - \frac{11}{3} = \frac{4 \bullet 5^2}{3} + \frac{2 \bullet 5}{3} - \frac{11}{3} = \frac{4 \bullet 25}{3} + \frac{10}{3} - \frac{11}{3} = \frac{100}{3} + \frac{10}{3} - \frac{11}{3} = \frac{99}{3} = 33$$

Zu 3: Bei der Umformung der vorstehenden Gleichung werden die Veränderungen (+18 und :3) auf beiden Seiten durchgeführt. Es kann vorkommen, dass eine Gleichung mit einem bestimmten Faktor multipliziert oder durch einen Divisor dividiert werden muss, um ein Ziel bzw. einen Zwischenschritt bei der Umformung dieser Gleichung zu erreichen. Dann müssen beide Seiten der Gleichung mit diesem Faktor multipliziert bzw. durch diesen Divisor dividiert werden, weil sich sonst der Wert der Gleichung ändert!

Beispiel 1: Die folgenden Gleichung soll mit 4 multipliziert werden:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2 \qquad | \bullet 4$$
$$4\boldsymbol{y} = 4(\boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2) = 4\boldsymbol{a}^2 + 8\boldsymbol{ab} + 4\boldsymbol{b}^2$$

Beispiel 2: Die folgende Gleichung soll mit a multipliziert werden:

$$\boldsymbol{y} = 3\boldsymbol{x}^2 - 5\boldsymbol{x} + 8 \qquad | \bullet \boldsymbol{a}$$
$$\boldsymbol{ay} = \boldsymbol{a}(3\boldsymbol{x}^2 - 5\boldsymbol{x} + 8) = 3\boldsymbol{ax}^2 - 5\boldsymbol{ax} + 8\boldsymbol{a}$$

Beachte:

Regeln für das Rechnen mit Brüchen:

1. **Brüche mit gleichem Nenner werden addiert oder subtrahiert, indem die Zähler addiert bzw. subtrahiert werden.**
2. **Brüche mit ungleichen Nennern werden addiert bzw. subtrahiert, indem man zunächst für alle Brüche den kleinsten gemeinsamen Nenner ermittelt und danach Regel 1 befolgt.**

3. **Brüche werden miteinander multipliziert, indem man alle Zähler miteinander multipliziert und alle Nenner miteinander multipliziert. (Beispiel:** $\frac{5}{3} \bullet \frac{3}{5} = \frac{15}{15} = 1$**)**
4. **Brüche werden durcheinander dividiert, indem man den Dividenden mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert. (Beispiel:** $\frac{3}{5} : \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \bullet \frac{5}{2} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ **)**
5. **Brüche werden potenziert, indem man sowohl den Zähler als auch den Nenner potenziert. (Beispiel:** $\left(\frac{3}{8}\right)^4 = \frac{3^4}{8^4} = \frac{81}{4096} = 0{,}0198$ **)**