

## Lineare Funktionen (Fortsetzung)

Die Umkehrfunktion  $f^{-1}$

Grafisch ist die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  durch Spiegelung der Bildpunkte der Funktion  $f$  an der ersten Winkelhalbierenden des Achsenkreuzes zu lösen.

Die Lösung kann aber auch über eine Wertetafel erfolgen, indem man die Werte des Definitionsbereiches durch die des Wertebereiches ersetzt und umgekehrt die Werte des Wertebereiches durch die des Definitionsbereiches.

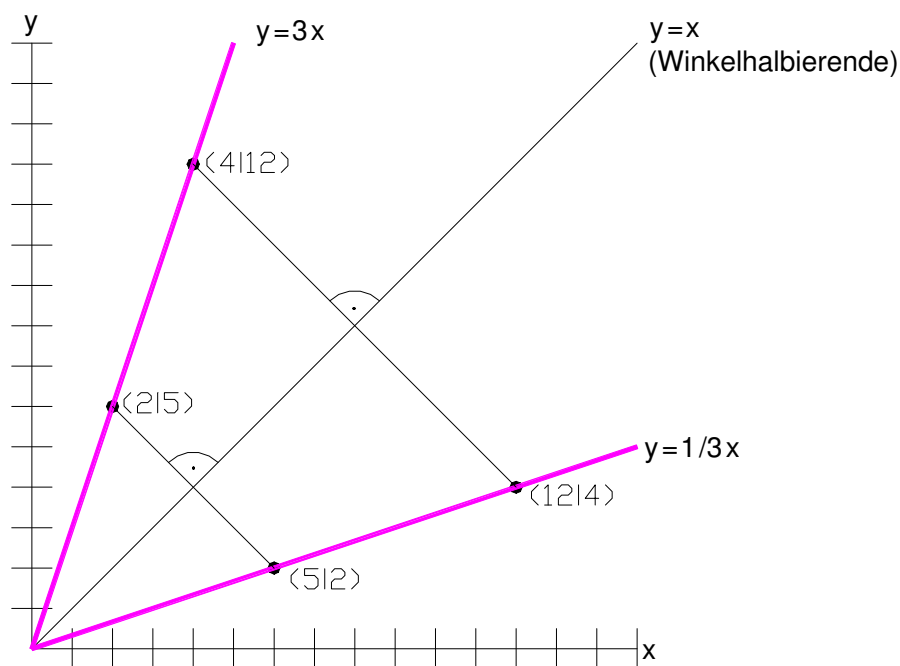
**Beispiel:**

Gegeben sei eine Funktion  $y = 3x$ . Gesucht ist die Umkehrfunktion  $f^{-1}$ .

**Lösung a):**

Grafisch konstruiert man die Funktion als Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems, da entsprechend der allgemeinen Funktionsgleichung für Geraden ( $y = mx + b$ ) die vollständige Funktionsgleichung  $y = \frac{3}{1}x + 0$  lautet.

Daraus ergibt sich folgende Gerade, die dann an der Winkelhalbierenden des Koordinatenkreuzes ( $y=x$ ) gespiegelt wird.



**Lösung b):**

Bei der Lösung der Umkehrfunktion über eine Wertetabelle geht man so vor, dass zunächst eine Wertetabelle für die eigentliche Funktion aufgestellt wird:

	D	X	1	2	3	4
$y = 3x$	W	$3x$	3	6	9	12

Anschließend werden die Werte von Wertebereich und Definitionsbereich jeweils ausgetauscht:

D (vorh. W)		$3x$	3	6	9	12
W (vorh. D)	$y = \frac{1}{3}x$	$x$	1	2	3	4

Eine Gerade wird durch eine lineare Funktionsgleichung der Form

$$y = mx + b$$

festgelegt. Dabei kennzeichnet  $b$  den Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse bzw. die vertikale Verschiebung der Geraden gegenüber dem Ursprung des Achsenkreuzes,  $m$  das **Steigungsmaß** bzw. die **Steigung** der Geraden. Die Steigung wird grundsätzlich als Bruch der Form

$$m = \frac{dy}{dx}$$

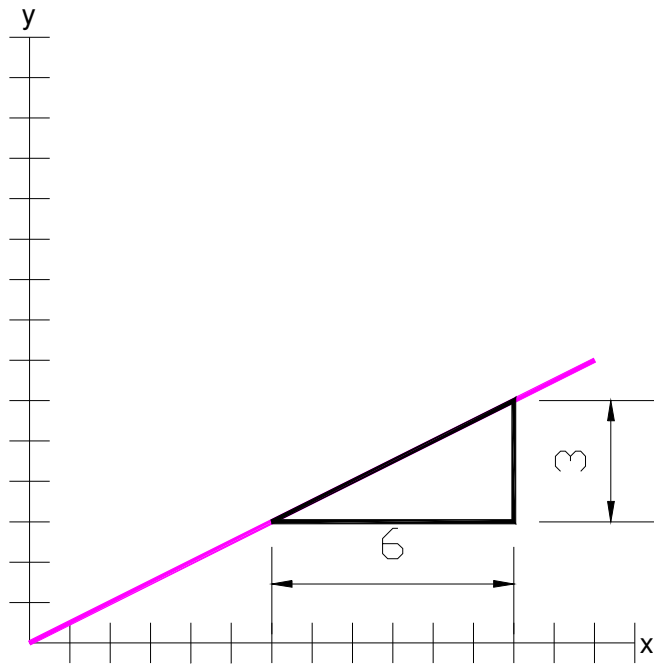
definiert. Dabei gibt  $dy$  die Veränderung der Koordinaten in y-Richtung in Abhängigkeit von der Änderung der Koordinaten in x-Richtung ( $dx$ ) an. Kann der Bruch derart gekürzt werden, dass  $dx = 1$  ist, dann gibt man gewöhnlich die Steigung als ganze Zahl mit  $m = dy$  an.

**Beispiel:**

$$y = \frac{6}{3}x + 2 \text{ ist gleichbedeutend mit } y = \frac{2}{1}x + 2 = 2x + 2$$

**Ermittlung der linearen Funktionsgleichung einer Geraden**

Mithilfe von Wertetabellen und Funktionsgleichungen kann man also Geraden konstruieren. Hat man eine Gerade und will allgemeingültig deren Funktionsgleichung ermitteln, bedient man sich eines **Steigungsdreiecks**.



Das Steigungsdreieck wird als rechtwinkeliges Dreieck konstruiert, dessen Hypotenuse sich an beliebiger Stelle an die Gerade schmiegt. Die Längen der Katheten lassen sich aus dem Koordinatenkreuz ablesen. Dabei gibt die der x-Achse parallel verlaufende Kathete die Veränderung der x-Koordinaten ( $dx$ ) an, die der y-Achse parallele Kathete die Veränderung der y-Koordinaten ( $dy$ ). Man könnte auch sagen:  $dx = x_1 - x_0$  bzw.  $dy = y_1 - y_0$ , wobei  $(x_0|y_0)$  den gemeinsamen Punkt der Geraden und des Steigungsdreiecks definiert, der dem Ursprung des Achsenkreuzes am nächsten liegt.  $(x_1|y_1)$  dagegen definiert den gemeinsamen Punkt der Geraden und des Steigungsdreiecks, der dem Ursprung des Achsenkreuzes am entferntesten liegt.

**Beachte:** Die Ablesung erfolgt von links nach rechts bzw. vom Ursprung des Achsenkreuzes ausgehend. Veränderungen der x-Koordinaten nach rechts ergeben ein positives  $dx$ , Veränderungen der y-Koordinaten nach oben ergeben ein positives  $dy$ . Veränderungen der Koordinaten nach links bzw. nach unten haben ein negatives Vorzeichen!

Im obigen Beispiel steigt die Gerade nach rechts an, so dass beide Kathetenlängen positiv sind. Für die Steigung ergibt sich somit  $m = \frac{dy}{dx} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ . Die Gerade geht durch den Ursprung, so dass die Verschiebung  $b$  der Geraden auf der y-Achse 0 ist. Damit ergibt sich folgende Funktionsgleichung dieser Geraden:

$$y = mx + b = \frac{1}{2}x + 0 = \frac{1}{2}x$$