

# Gebrochenrationale Funktionen

## Vorbemerkungen

Bei den bisherigen Betrachtungen über Funktionen und Funktionsgleichungen hatten wir stets mit der unabhängigen Variablen  $x > 1$  zu tun. Regelmäßig führt die Praxis jedoch auch zu gebrochenen Variablen, so z.B. bei der Berechnung der Stückkosten einer Produktion.

Wird z.B. die Funktion der Gesamtkosten einer Produktion durch eine Funktion der Form  $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  definiert, so wird die Funktion der Gesamtstückkosten durch  $K_{GSt}(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x}$  gebildet. Durch Ausklammern von  $x$  kann gekürzt werden:

$$K_{GSt}(x) = \frac{x(ax^2 + bx + c + \frac{d}{x})}{x} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}$$

Diese Funktion setzt sich aus einem ganzrationalen quadratischen Anteil  $(ax^2 + bx + c)$  und einem Bruch  $\frac{d}{x}$  zusammen.

Funktionen der Art  $y = \frac{d}{x}$  heißen gebrochenrationale Funktionen und unterscheiden sich gänzlich von den ganzrationalen Funktionen.

## Graph der Funktion $f: x \mapsto \frac{a}{x} + b$

Die allgemeine Form gebrochenrationaler Funktionen ist streng genommen der Quotient aus zwei ganzrationalen Funktionen:

$$f: x \mapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

$$n \in \mathbb{N}; m \in \mathbb{N}^*; a_k, b_k \in \mathbb{R}; a_n \neq 0; b_m \neq 0$$

Gebrochenrationale Funktionen der einfachen Form  $x \mapsto \frac{a}{x} + b, x \neq 0$  haben nicht nur bei der Berechnung von Stückkosten eine zentrale Bedeutung, sondern sind allgemein bei der Lösung wirtschaftlicher und verwaltungstechnischer Aufgabenstellungen weit verbreitet. Wie sich unschwer erkennen lässt, ist diese Form gebrochenrationaler Funktionen für  $x=0$  nicht definiert.

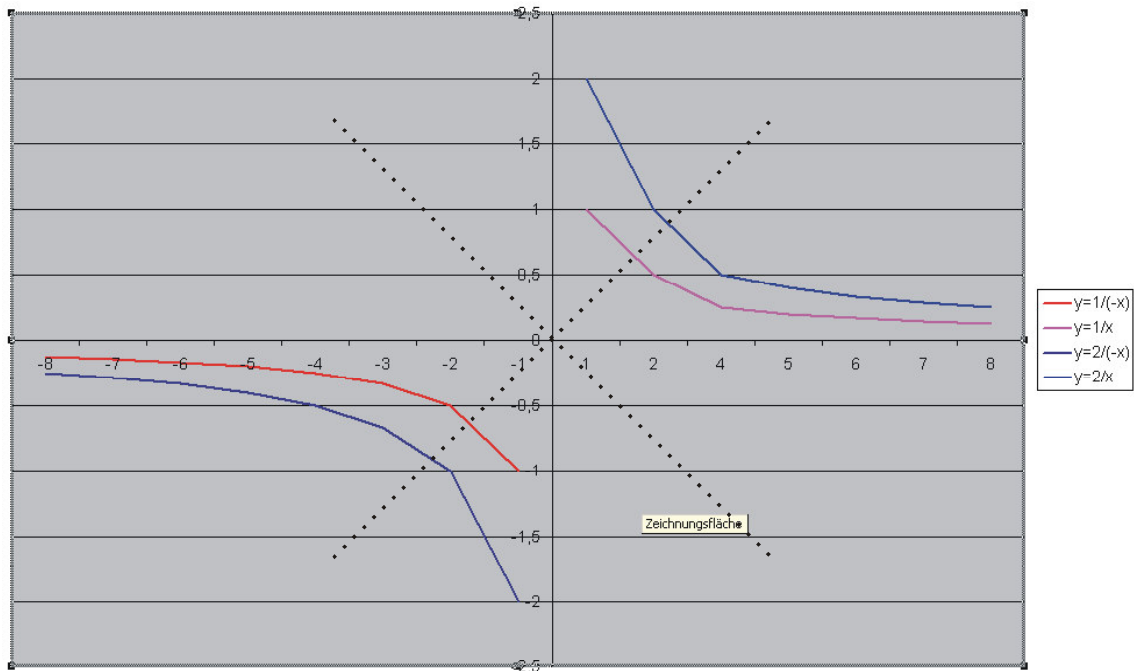
Der Graph einer gebrochenrationalen Funktion heißt Hyperbel.

### Beispiel:

Gegeben seien die Funktionen  $x \mapsto \frac{1}{x}$  und  $x \mapsto \frac{2}{x}$ ,  $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ . Über eine

Wertetabelle erhalten wir die Funktionswerte:

	x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$x \mapsto \frac{2}{x}$	$\frac{2}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$



1. Hyperbeln besitzen zwei Äste (je einer im I. und einer im III. Quadranten).
2. Beide Äste sind punktsymmetrisch zum Ursprung des Achsenkreuzes und achsensymmetrisch zu den Winkelhalbierenden.
3. Die Hyperbeln haben in dieser speziellen Form keinen Nullpunkt, d.h. sie schneiden nie die X-Achse, der sie sich stetig nähern, ohne sie ganz zu erreichen.
4. Die Hyperbeln haben keine Extremstellen, bei  $x = 0$  eine Unendlichkeitsstelle bzw. einen Pol. Strebt  $x$  von rechts gegen 0, so strebt  $y$  gegen  $\infty$ . Strebt  $x$  von links gegen 0, so strebt  $y$  gegen  $-\infty$ .
5. Die beiden Äste einer Hyperbel sind nicht miteinander verbunden.
6. Für  $x \rightarrow \pm\infty$  strebt  $y \rightarrow \pm 0$ .

Die Koordinatenachsen werden als *Asymptoten* der Hyperbeln bezeichnet.

Für  $a > 1$  ist der Funktionsgraph von  $x \mapsto \frac{a}{x}$  eine gedehnte Hyperbel, deren Äste sich langsamer den Asymptoten nähern als die der Funktion  $x \mapsto \frac{1}{x}$ . Ist umgekehrt

$0 < a < 1$ , dann ist der Funktionsgraph von  $x \mapsto \frac{a}{x}$  eine gepresste Hyperbel, deren Äste sich schneller den Asymptoten nähern. Bei  $a < 0$  werden die Äste der Hyperbel an der X-Achse gespiegelt.

Ähnlich wie bei quadratischen Funktionen bewirkt der Parameter  $b$  in gebrochenrationalen Funktionen der Form  $x \mapsto \frac{a}{x} + b$  eine Verschiebung der Hyperbel längs der Y-Achse. Neben der Y-Achse wird dann eine Parallele der X-Achse im Abstand  $b$  zur Asymptote.

## Exponentialfunktion $f : x \mapsto a^x$

Im Gegensatz zu den bisher behandelten ganz- und gebrochenrationalen Funktionen bildet die unabhängige Variable  $x$  nicht die Basis einer Potenz sondern steht im Exponenten. Eine solche Funktion wird als **Exponentialfunktion** bezeichnet. Der dazugehörige Graph ist eine **Exponentialkurve**. In ihrem Aussehen ähneln Exponentialkurven stark den Hyperbeln, jedoch besitzen sie nur einen Ast. Auch sie nähern sich der x-Achse, ohne sie jemals zu erreichen.

Exponentialkurven mit einer Basis  $a > 1$  haben die negative X-Achse als Asymptote. Umgekehrt haben Exponentialkurven mit einer Basis  $0 < a < 1$  die positive X-Achse als Asymptote. Für  $a = 1$  erhalten wir mit  $y = 1$  als Graphen die Parallel der X-Achse durch den Punkt 1 auf der Y-Achse.

Der Graph der Funktion  $x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x$  entspricht der Spiegelung des Graphen der

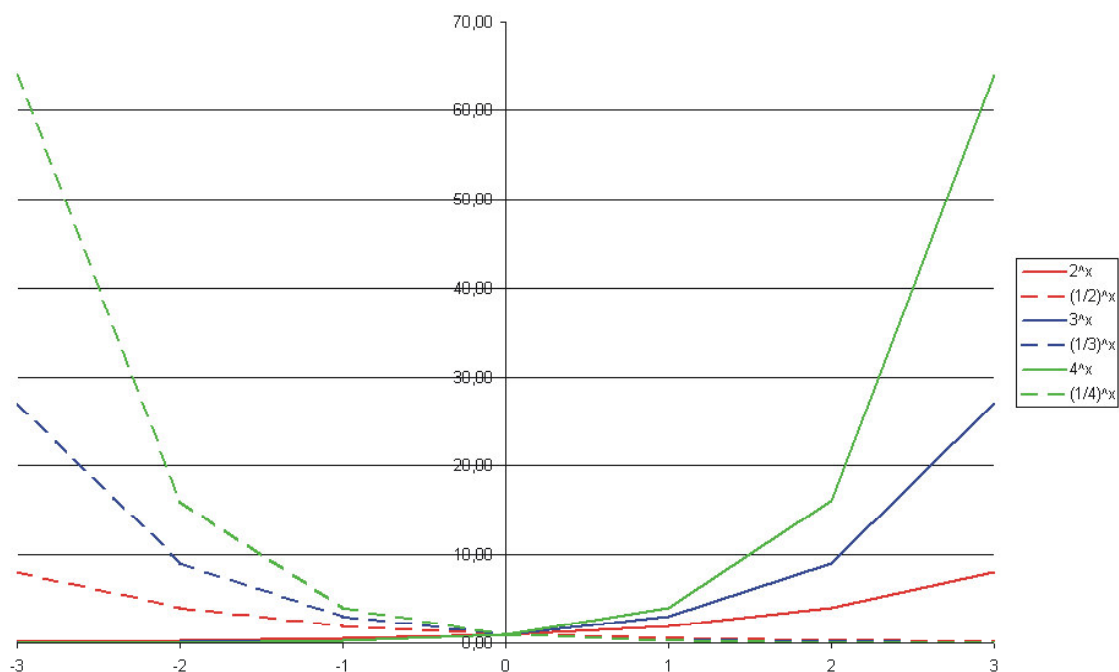
Funktion  $x \mapsto a^x$  an der X-Achse. Beide Graphen schneiden sich im Punkt P(0|1).

### Beispiel:

Gegeben seien die Funktionen

$$x \mapsto 2^x, x \mapsto 3^x, x \mapsto 4^x, x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x, x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x \text{ und } x \mapsto \left(\frac{1}{4}\right)^x \quad x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+^*$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$2^x$	0,13	0,25	0,50	1,00	2,00	4,00	8,00
$(1/2)^x$	8,00	4,00	2,00	1,00	0,50	0,25	0,13
$3^x$	0,04	0,11	0,33	1,00	3,00	9,00	27,00
$(1/3)^x$	27,00	9,00	3,00	1,00	0,33	0,11	0,04
$4^x$	0,02	0,06	0,25	1,00	4,00	16,00	64,00
$(1/4)^x$	64,00	16,00	4,00	1,00	0,25	0,06	0,02



### Logarithmusfunktion $f : x \mapsto \log_a x$

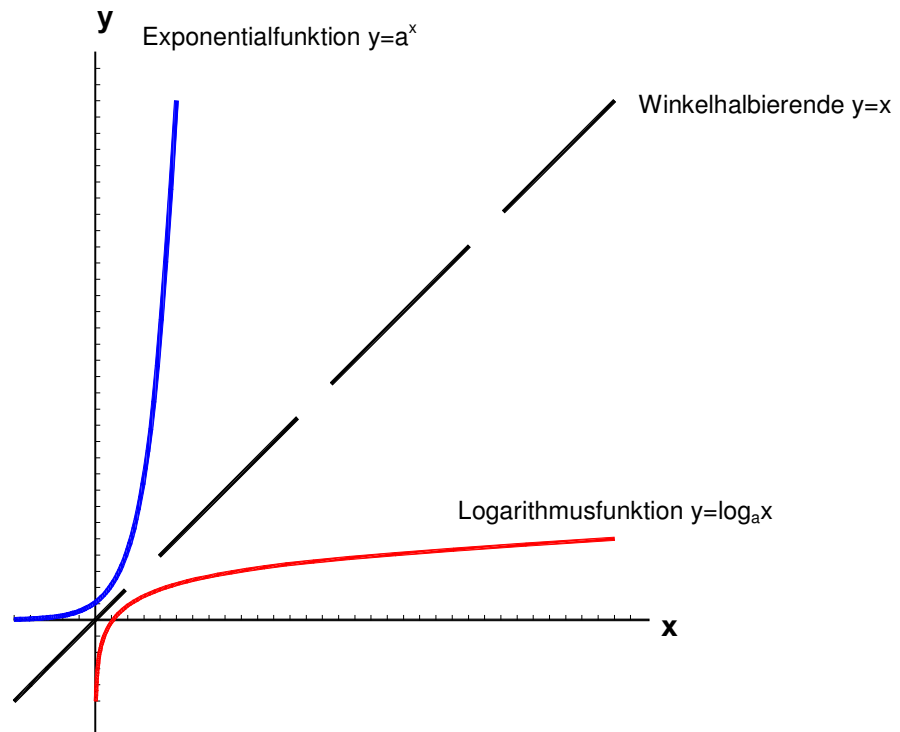
Eine Funktion der Form  $f : x \mapsto \log_a x$  heißt Logarithmusfunktion, weil sie aus dem Logarithmus der unabhängigen Variablen  $x$  definiert wird. Sie ist die Umkehrung der Exponentialfunktion  $x \mapsto a^x$ . Der Graph der Logarithmusfunktion entsteht durch Spiegelung der Exponentialfunktion an der ersten Winkelhalbierenden. Sie hat den Definitionsbereich  $D = \mathbb{R}_+^*$  und den Wertebereich  $W = \mathbb{R}$ . Wie sich aus dem Funktionsgraphen des nachfolgenden Beispiels unschwer erkennen lässt, nähert sich bei kleiner werdendem  $x$  der linke Ast der Logarithmusfunktion der negativen Y-Achse, ohne sie jemals zu erreichen. Demzufolge ist für  $x \leq 0$  der Wert der Funktion  $x \mapsto \log_a x$  nicht definiert.

Ist  $a > 1$ , so gilt:

- $\log_a x > 0$  für  $x > 1$ ,
- $\log_a x = 0$  für  $x = 1$ ,
- $\log_a x < 0$  für  $0 < x < 1$

Ebenso ist der Wert der Funktion  $x \mapsto \log_a x$  für  $a \leq 0$  nicht definiert.

<b>x</b>	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
<b>y=x</b>	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
<b>Y=2<sup>x</sup></b>	0,03125	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16	32
<b>x</b>	0,03125	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16	32
<b>y=log<sub>2</sub>x</b>	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5



Sowohl Exponential- als auch Logarithmusfunktion haben eine große Bedeutung in der Statistik (z.B. Bevölkerungswachstum) und der Wirtschaftsmathematik (Marktsättigung, Wachstumsprognosen, etc.).