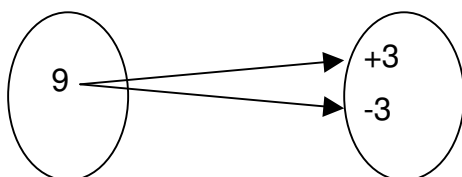


# Quadratische Gleichungen

## Rechnerische Lösung der reinquadratischen Gleichung

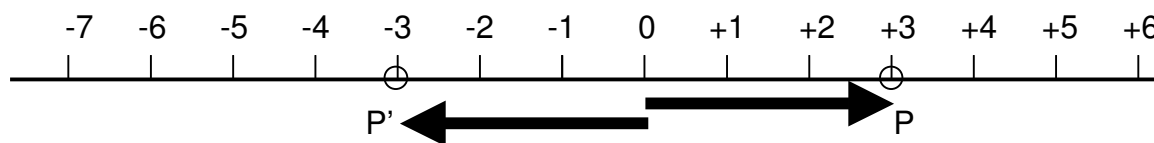
$$ax^2 + c = 0$$

Bei der Behandlung der Potenzrechnung und des Radizierens haben wir gesehen, dass die Lösung von Wurzeln nicht immer eindeutig sein muss. So kann z.B. die Potenz 9 sowohl aus  $+3^2$  als auch aus  $-3^2$  gebildet werden. Man könnte dies auch so beschreiben:



Man könnte auch sagen: Die Quadratwurzel einer positiven Zahl ist diejenige Zahl, deren Betrag mit sich selbst multipliziert den Radikanden der Wurzel ergibt.

Stellt man das obige Mengendiagramm auf der Zahlengeraden dar, so ergibt sich folgendes Bild:



Für beide Punkte P und P' ist die Länge des Bildpfeils gleich. Berücksichtigt man daher nicht die Richtung eines Zahlenpfeils, so spricht man vom Betrag der Zahl  $|a|$ .

$|a|$  wird gelesen „Betrag von a“.  $|a|$  ist niemals negativ, deshalb gilt also:

|            |                    |                               |
|------------|--------------------|-------------------------------|
| $ a  = a$  | <b>bei</b> $a > 0$ | $ +9  = 9$                    |
| $ a  = -a$ | <b>bei</b> $a < 0$ | Beispiele: $ -9  = -(-9) = 9$ |
| $ a  = 0$  | <b>bei</b> $a = 0$ | $ 0  = 0$                     |

$|a|$  ist also diejenige der beiden Zahlen a und  $-a$ , die nicht negativ ist ( $a \in \mathbb{R}$ ).

### Beispiel:

Gegeben sei die Gleichung  $x^2 - 25 = 0$ . Diese Gleichung lässt sich zunächst einmal auf zwei Wegen lösen:

1. Lösung mit Hilfe der binomischen Formel  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  :

$$x^2 - 25 = 0$$

$\Rightarrow$

$$(x + \sqrt{25})(x - \sqrt{25}) = 0$$

$$(x + 5)(x - 5) = 0$$

**Dieses Produkt ergibt 0, wenn einer der Faktoren 0 ist :**

$$(x + 5) = 0$$

$$x_1 = -5$$

$$(x - 5) = 0$$

$$x_2 = +5$$

$$L = \{+5; -5\}$$

2. Lösung mit dem Betrag der Zahl:

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 = 25$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$$

$$|x| = 5$$

$$x_1 = 5$$

$$-x_2 = 5$$

$$x_2 = -5$$

$$L = \{+5; -5\}$$

3. Allgemein kann man schreiben:

$$x^2 = c$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{c}$$

$$x_1 = \sqrt{c}$$

$$x_2 = -\sqrt{c}$$

$$L = \{x \mid x = \sqrt{c} \vee x = -\sqrt{c}\}$$

Für  $c < 0$  ist die Gleichung  $x^2 = c$  bezüglich  $\mathbb{R}$  nicht erfüllbar, denn es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat negativ ist!

## Rechnerische Lösung der gemischtquadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$

Bei der Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  kommt die Variable in der 1. und 2. Potenz vor. Deshalb spricht man von einer gemischtquadratischen Gleichung. Dividiert man die Gleichung durch den Koeffizienten  $a$ , so erhält man die Form  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ .

Daraus lässt sich die Normalform der quadratischen Gleichung ableiten:

$x^2 + px + q = 0$ , wenn man  $\frac{b}{a} = p$  und  $\frac{c}{a} = q$  setzt. Ist  $p = 0$ , dann erhält man die reinquadratische Gleichung  $x^2 + q = 0$ .

Gemischtquadratische Gleichungen lassen sich mit Hilfe der quadratischen Ergänzung lösen, wie dies bereits besprochen wurde, oder mit Hilfe von Formeln sowie die Zerlegung in Linearfaktoren.

### 1. Quadratische Ergänzung und Betrag:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= 0 && |: a \\
 x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 && | -\frac{c}{a} \\
 x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} && | \text{binomische Ergänzung} : \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
 x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} && | \sqrt{\phantom{x}} \\
 x + \frac{b}{2a} &= \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2} - \sqrt{\frac{c}{a}} = \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{c}{a}} \\
 x &= \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{b}{2a} \\
 |x| &= -\sqrt{\frac{c}{a}}
 \end{aligned}$$

### Beispiel:

$$\begin{aligned}
 4x^2 + 16x + 12 &= 0 && |: 4 \\
 x^2 + 4x + 3 &= 0 && | -3 \\
 x^2 + 4x &= -3 && | \text{binom. Ergänzung} : 2^2 \\
 x^2 + 4x + 2^2 &= 2^2 - 3 = 1 \\
 (x + 2)^2 &= 1 && | \sqrt{\phantom{x}} \\
 \sqrt{(x + 2)^2} &= \sqrt{1} \\
 |x + 2| &= 1 \\
 x_1 &= -1 \\
 x_2 &= -3
 \end{aligned}$$

### 2. Quadratische Ergänzung und Binomische Formel:

Wird die Gleichung weiterhin gleich 0 gesetzt, ergibt sich folgendes Bild:

$$(x + 2)^2 - 1 = 0 \quad | \text{Umstellen zur 3. binom. Formel}$$

$$[(x + 2) + 1][(x + 2) - 1] = 0$$

$$(x + 2) + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$$

$$(x + 2) - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1$$

**Anmerkung:** Die Addition von 1 ist zulässig, weil  $+1 \cdot -1 = -1$ ! Ein Produkt ist gleich 0, wenn einer der Faktoren gleich 0 ist!

3. Lösung mit Hilfe von Formeln:

Die Normalform der quadratischen Gleichung lautet:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + px = -q \quad | \text{quadratische Ergänzung}$$

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_{1,2} + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad | -\frac{p}{2}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Der Radikand wird auch als Diskriminante  $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$  der Gleichung

$x^2 + px + q = 0$  genannt. Setzt man nun wieder  $p = \frac{b}{a}$  und  $q = \frac{c}{a}$ , so erhält man die Diskriminante  $D = b^2 - 4ac$  der Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Die Diskriminante gibt insbesondere Auskunft über die Größe der Lösungsmenge:

1. Ist  $D > 0$ , so besteht die Lösungsmenge aus zwei verschiedenen Werten  $x_1$  und  $x_2$  aus  $\mathbb{R}$ .  $L = \{x_1; x_2\}$ .
2. Ist  $D = 0$ , so besteht die Lösungsmenge nur aus einem Wert  $x_1 = x_2$  aus  $\mathbb{R}$ .  $L = \{x_1 = x_2\}$ .
3. Ist  $D < 0$ , dann hat die Gleichung keine Lösung in der Menge  $\mathbb{R}$ .  $L = \emptyset$ .

Die Lösung quadratischer Gleichungen mit Hilfe der Diskriminanten lässt sich folgendermaßen formulieren:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{oder} \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (D \leq 0; x_{1,2} \in \mathbb{R}).$$

## 4. Zerlegung in Linearfaktoren:

Ausgangspunkt ist wieder die Normalform der quadratischen Gleichung  $x^2 + px + q = 0$ . Liegen die Variablen  $p$  und  $q$  als ganze Zahlen vor, so ist die Lösung der Gleichung oft durch Probieren zu ermitteln, indem man versucht, den Term  $x^2 + px + q$  auf die Form

$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + xb + ab = x^2 + x(a + b) + ab$  zu bringen. Dabei ist  $p = a + b$  und  $q = ab$ . Folglich sind  $a$  und  $b$  zwei Zahlen, deren Summe  $p$  und deren Produkt  $q$  entspricht.

Diese Methode lässt sich jedoch nur bei einfachen Termen anwenden.

**Beispiele:**

|                |      |                 |
|----------------|------|-----------------|
| $x^2 + 4x + 3$ | weil | $3 = 1 \cdot 3$ |
| $L = \{1; 3\}$ |      | $4 = 1 + 3$     |

|                 |      |                     |
|-----------------|------|---------------------|
| $x^2 - 6x - 7$  | weil | $-7 = 1 \cdot (-7)$ |
| $L = \{1; -7\}$ |      | $-6 = 1 - 7$        |

Weil  $x$  in den Faktoren in der Linearform vorkommt, spricht man von der Zerlegung in Linearfaktoren.

Sind  $x_1$  und  $x_2$  Lösungen der Gleichung  $x^2 + px + q = 0$ , so gilt

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = 0; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bei der Normalform der Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  ist  $x_1 + x_2 = -p$ ;  $x_1 \cdot x_2 = q$  (Satz von Vieta).

# Ganzrationale Funktionen

## 3. und 4. Grades

### Grafische Darstellungen

Funktionen der Form  $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$  bezeichnet man als Funktionen 3. Grades. Allgemein bezeichnet man Funktionen der Form  $f : x \mapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  als ganzrationale Funktionen  $n$ -ten Grades ( $n \in \mathbb{N}; a_n, \dots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ ).

Für die grafische Darstellung gelten grundsätzlich die gleichen Regeln wie für quadratische Gleichungen. D.h. ein Koeffizient beeinflusst die Form des Graphen ( $0 < a, b, c, d, \dots < 1$  bedeutet Stauchen des Grafen,  $a, b, c, d, \dots > 1$  Streckung des Graphen). Ein negatives Vorzeichen der Koeffizienten bedeutet eine Spiegelung des Grafen an der y-Achse des Koordinatensystems.

**Grundsätzlich gilt:**

Eine Funktion  $n$ -ten Grades beinhaltet stets die Grundform einer Parabel.

Eine Funktion  $n$ -ten Grades hat maximal  $n$  Nullstellen und höchstens  $n-2$  Wendepunkte.

Die Grafen von Funktionen  $n$ -ten Grades verlaufen bei geradem Exponenten achsensymmetrisch zur y-Achse, bei ungeradem Exponenten punktsymmetrisch zum Ursprung.

**Beispiele:**

1.  $y = x^3$

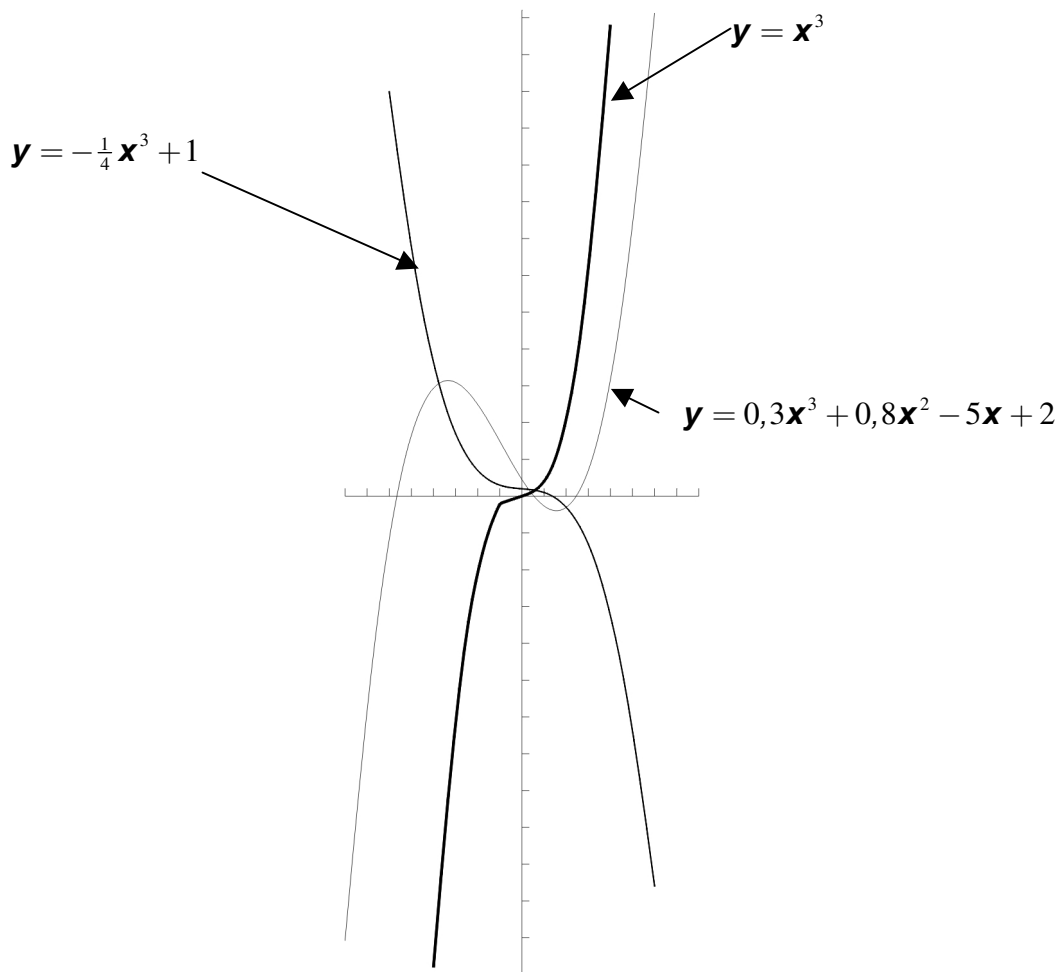
|          |     |     |    |    |   |   |   |    |    |
|----------|-----|-----|----|----|---|---|---|----|----|
| <b>x</b> | -4  | -3  | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3  | 4  |
| <b>y</b> | -64 | -27 | -8 | -1 | 0 | 1 | 8 | 27 | 64 |

2.

|          |    |       |    |      |    |      |   |      |    |       |     |        |     |
|----------|----|-------|----|------|----|------|---|------|----|-------|-----|--------|-----|
| <b>x</b> | -6 | -5    | -4 | -3   | -2 | -1   | 0 | 1    | 2  | 3     | 4   | 5      | 6   |
| <b>y</b> | 55 | 32,25 | 17 | 7,75 | 3  | 1,25 | 1 | 0,75 | -1 | -5,75 | -15 | -30,25 | -53 |

3.

|          |       |       |    |     |      |      |      |     |   |      |      |     |    |      |      |
|----------|-------|-------|----|-----|------|------|------|-----|---|------|------|-----|----|------|------|
| <b>x</b> | -8    | -7    | -6 | -5  | -4   | -3   | -2   | -1  | 0 | 1    | 2    | 3   | 4  | 5    | 6    |
| <b>y</b> | -60,4 | -26,7 | -4 | 9,5 | 15,6 | 16,1 | 12,8 | 7,5 | 2 | -1,9 | -2,4 | 2,3 | 14 | 34,5 | 65,6 |



### Polynomdivision: Bestimmung der Lösungsmenge von Gleichungen 3. und 4. Grades mit ganzzahligen Elementen

Elemente einer Gleichung wie  $x + 3$ ,  $2x^2 - 6x + 9$ ,  $x^3 - 5x^2 + 2x - 5$  usw. werden Polynome genannt (griechisch **polys**: viel; **nomos**: Regel, Gesetz). Die Division von Polynomen folgt eigenen Gesetzmäßigkeiten. Dazu ein Beispiel:

|   |   |
|---|---|
| $(6x^3 + 11x^2 - 9x - 4) / (3x + 1) = 2x^2 + 3x - 4$  | <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Division von <math>6x^3 : 3x = 2x^2</math>.</li> <li>2. Multiplikation: <math>2x^2 \cdot (3x + 1) = 6x^3 + 2x^2</math></li> <li>3. Subtrahieren von <math>6x^3 + 2x^2</math></li> <li>4. Division von <math>9x^2 : 3x = 3x</math></li> <li>5. Multiplikation: <math>3x \cdot (3x + 1) = 9x^2 + 3x</math></li> <li>6. Subtrahieren von <math>9x^2 + 3x</math></li> <li>7. Division von <math>-12x : 3x = -4</math></li> <li>8. Multiplikation: <math>-4 \cdot (3x + 1) = -12x - 4</math></li> <li>9. Addition von <math>-12x - 4</math></li> </ol> |
| $\begin{array}{r} (-) \quad (-) \\ + 6x^3 + 2x^2 \\ \hline + 9x^2 - 9x - 4 \\ (-) \quad (-) \\ + 9x^2 + 3x \\ \hline -12x - 4 \\ (+) \quad (+) \\ -12x - 4 \\ \hline \end{array}$ |   |

Die Ergebnisse der einzelnen Divisionen ergeben aneinandergereiht das Ergebnis der Polynomdivision!

Entstehen bei der Multiplikation des Teilquotienten mit dem Divisor neue Terme, so werden diese ebenfalls vom Dividenden subtrahiert und bei der weiteren Division berücksichtigt.

**Beispiel:**

$$\begin{array}{r}
 (x^3 - 8) : (x - 2) = x^2 + 2x + 4 \\
 (-) \quad (-) \\
 \hline
 x^3 - 2x^2 \\
 \hline
 2x^2 - 8 \\
 (-) \quad (-) \\
 \hline
 2x^2 - 4x \\
 \hline
 4x - 8 \\
 (-) \quad (-) \\
 \hline
 4x - 8 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

- 1. Ergebnis der 1. Division:  $x^2$
  - 2. Ergebnis der 2. Division:  $+2x$
  - 3. Ergebnis der 3. Division:  $+4$
- 
- 1.  $x^3 : x = x^2$        $x^2 \cdot (x - 2) = x^3 - 2x^2$
  - 2.  $2x^2 : x = 2x$        $2x \cdot (x - 2) = 2x^2 - 4x$
  - 3.  $4x : x = 4$        $4 \cdot (x - 2) = 4x - 8$

Wir hatten festgestellt, dass die Lösungsmenge quadratischer Gleichungen durch Auflösung in Linearkomponenten möglich ist. Sind  $x_1$  und  $x_2$  die Lösungen der quadratischen Gleichung  $x^2 + px + q = 0$ , dann gilt ebenfalls:  $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ .

In erweiterter Form ist diese Methode auch auf bestimmte Gleichungen 3. und 4. Grades übertragbar.

**Beispiele:**

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

$x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 3$

$$x^4 - 10x^2 + 9 = (x + 3)(x + 1)(x - 1)(x - 3)$$

$x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 3$

Bei **Gleichungen 3. Grades** mit ganzzahligen Elementen wird zunächst die Lösung für  $x_1$  durch Probieren bestimmt. Danach ist die Gleichung durch  $(x - x_1)$  zu dividieren (Polynomdivision) und so in eine quadratische Gleichung umzuformen. Die Lösungen für  $x_2$  und  $x_3$  werden zuletzt durch Zerlegung dieser quadratischen Gleichung in Linearfaktoren bestimmt.

Bei **Gleichungen 4. Grades** mit ganzzahligen Elementen wird zunächst ebenfalls  $x_1$  durch Probieren bestimmt und anschließend über die Division durch  $(x - x_1)$  die Gleichung zu einer Gleichung 3. Grades umgeformt. Daraus wird  $x_2$  ebenfalls durch Probieren ermittelt und durch  $(x - x_2)$  dividiert. Die Lösungen für  $x_3$  und  $x_4$  sind zuletzt durch Zerlegen der quadratischen Gleichung in Linearfaktoren zu bestimmen.

## Berechnung der Nullstellen von Funktionen 3. und 4. Grades

Was sind eigentlich „Nullstellen“? Schneidet ein Funktionsgraph an einer oder mehreren Stellen die x-Achse des Koordinatensystems, ist also das Ergebnis der Funktionsgleichung (y-Wert) gleich 0 bzw. gilt  $f(x) = 0$ , dann spricht man von einer Nullstelle. Die diesem Punkt zugeordneten x-Werte bezeichnet man als  $x_0$  bzw.  $x_p$ .

Die Berechnung von  $x_0$  erfolgt mit der zuvor behandelten Polynomdivision. Dies soll nun an einem Beispiel erläutert werden:

Gegeben sei eine Funktion  $x \mapsto f(x)$  mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = y = 0,5x^3 - 1,5x^2 - 3x + 4.$$

$$f(x) = y = 0,5x^3 - 1,5x^2 - 3x + 4$$

$$0,5x^3 - 1,5x^2 - 3x + 4 = 0$$

|  $y = 0$  setzen

$$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$$

| : 0,5 bzw. • 2

$$x_1 = 1$$

| Lösung  $x_1$  durch Probieren

$$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$$

| :  $(x - 1)$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

| in Linearfaktoren zerlegen

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

|  $x_2$  und  $x_3$  bestimmen

$$x_2 = 4$$

$$x_3 = -2$$

$$\Rightarrow N_1(1|0), N_2(4|0), N_3(-2|0)$$

Durch Einsetzen der berechneten  $x_0$ -Werte lässt sich das Ergebnis der Nullstellenermittlung überprüfen.

Die Berechnung der Nullstellen bei Funktionen 4. Grades folgt dem gleichen Schema, nur müssen hier die Lösungen von  $x_1$  und  $x_2$  durch Probieren bestimmt werden. Nach der Bestimmung von  $x_1$  wird dabei die Funktion 4. Grades auf eine Funktion 3. Grades reduziert und danach  $x_2$  ebenfalls durch Probieren bestimmt.

### Beispiel:

Gegeben sei eine Funktion  $x \mapsto f(x)$  mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = y = 0,1x^4 + 0,2x^3 - 1,1x^2 - 1,2x.$$

|  |                              |
|--|------------------------------|
| $0,1x^4 + 0,2x^3 - 1,1x^2 - 1,2x = 0$                  | $y = 0$ setzen               |
| $x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x = 0$                         | : 0,1 bzw. •10               |
| $x_1 = 0$  | Lösung $x_1$ durch Probieren |
| $x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x = 0$                         | : $(x - 0)$ bzw. : $x$       |
| $x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$                            | Lösung $x_2$ durch Probieren |
| $x_2 = -1$   | : $(x + 1)$                  |
| $x^2 + x - 12 = 0$                                     | Zerlegen in Linearfaktoren   |
| $(x - 3)(x + 4) = 0$                                   | $x_3$ und $x_4$ bestimmen    |
| $x_3 = 3$  |                              |
| $x_4 = -4$   |                              |
| $\Rightarrow N_1(0 0), N_2(-1 0), N_3(3 0), N_4(-4 0)$ |                              |

Wieder lässt sich das Ergebnis der Nullstellenermittlung durch Einsetzen der berechneten  $x_0$ -Werte überprüfen.

### Rechnerische Bestimmung der Funktionsgleichung 3. Grades

Jede Kurve einer Funktionsgleichung 3. Grades lässt sich durch vier Punkte mathematisch eindeutig festlegen. Ähnlich wie bei der Berechnung quadratischer Funktionsgleichungen aus einer Menge vorgegebener Punkte kann auch eine Funktionsgleichung 3. Grades bestimmt werden. Hatten wir jedoch bei der Ermittlung quadratischer Funktionen lediglich ein Gleichungssystem mit drei unbekanntem Variablen (vgl. Thema: Äquivalenzumformung), müssen wir nun ein Gleichungssystem mit vier Variablen lösen.

#### Beispiel:

Auf einer durch eine Funktionsgleichung der Form:  $f(x) = y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  bestimmten Kurve liegen die Punkte:  $A(-1|9)$ ,  $B(1|3)$ ,  $C(2|0)$  und  $D(3|5)$ . Gesucht ist die für diese Funktion zutreffende Funktionsgleichung:

#### 1. Schritt: Einsetzen der Punkte in die Funktionsgleichung

$$f(x) = y = ax^3 + bx^2 + cx + d :$$

$$A(-1|9): \quad -a + b - c + d = 9 \quad (1)$$

$$B(1|3): \quad a + b + c + d = 3 \quad (2)$$

$$C(2|0): \quad 8a + 4b + 2c + d = 0 \quad (3)$$

$$D(3|5): \quad 27a + 9b + 3c + d = 5 \quad (4)$$

**2. Schritt:** Eliminierung von drei Variablen durch Äquivalenzumformung:

a) Eliminierung von a aus den Gleichungen (2), (3) und (4):

$$\begin{array}{rcl} -a + b - c + d = 9 & (1) \\ 2b + 2d = 12 & (2a) = (2) + (1) \\ 12b - 6c + 9d = 72 & (3a) = (3) + (1) \cdot 8 \\ 36b - 24c + 25d = 248 & (4a) = (4) + (1) \cdot 27 \end{array}$$

b) Eliminierung von b aus den Gleichungen (3a) und (4a):

$$\begin{array}{rcl} -a + b - c + d = 9 & (1) \\ 2b + 2d = 12 & (2a) \\ -6c - 3d = 0 & (3b) = (3a) + (2a) \cdot (-6) \\ -24c - 8d = 32 & (4b) = (4a) + (2a) \cdot (-18) \end{array}$$

c) Eliminierung von c aus Gleichung (4b):

$$\begin{array}{rcl} -a + b - c + d = 9 & (1) \\ 2b + 2d = 12 & (2a) \\ -6c - 3d = 0 & (3b) \\ 4d = 32 & (4c) = (4b) + (3b) \cdot (-4) \\ 4d = 32 & (4c) \\ d = 8 & (4d) \\ -6c - 24 = 0 & (5) : \text{Einsetzen von } d \text{ in } (3b) \\ -6c = 24 \\ c = -4 & (5a) \\ 2b + 16 = 12 & (6) : \text{Einsetzen von } d \text{ in } (2a) \\ 2b = -4 \\ b = -2 & (6a) \\ -a - 2 + 4 + 8 = 9 & (7) : \text{Einsetzen von } b, c \text{ und } d \text{ in } (1) \\ -a = -1 \\ a = 1 \end{array}$$

Die Funktionsgleichung lautet also:  $f(x) = y = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

Noch wichtiger als bei der Bestimmung quadratischer Funktionen ist hier, auf eine übersichtliche Schreibung der Teilgleichungen zu achten. D.h. die Variablen sollten möglichst untereinander geschrieben werden!

Eine Überprüfung der Gleichung durch Einsetzen der Punktkoordinaten ergibt, dass die Gleichung tatsächlich korrekt ist.

Die Berechnung von Gleichungen höherer Ordnung folgt dem gleichen Schema, nur dass dann Gleichungssysteme mit 5 oder mehr unbekanntem Variablen durch Äquivalenzumformung zu bearbeiten sind. Gemäß der dann umfangreicheren Teilgleichungen steigt der Arbeitsaufwand allerdings entsprechend an.

## Angewandte Mathematik

Nach der Theorie kommt nun endlich die Praxis. Sie haben mich bereits des öfteren gefragt, warum diese teilweise doch recht aufwändige Theorie erlernt werden müsste. Kann ich das alles denn eigentlich überhaupt einmal anwenden? Ist diese „Unmenge“ Wissen im täglichen Gebrauch einsetzbar? Eigentlich macht das alles doch der Computer.

Sicher ist diese Skepsis zunächst begründet. Dieser Satz wird Sie erstaunen, habe ich in den vergangenen Monaten doch immer das genaue Gegenteil behauptet.

Aber es stimmt: Insbesondere die Büroarbeiten werden seit vielen Jahren vom Computer beherrscht. Und der macht doch eigentlich alles richtig!? Wirklich?

Nun: Die Technik ist zwar nahezu perfekt. Aber eben nur fast! Die Technik der Taschenrechner und Computer ist ja auch nicht das eigentliche Problem. Das Hauptproblem ist der Mensch, der diese Technik und vor allem die dazugehörige Software entwickelt und der zudem den Taschenrechner und Computer bedient.

Wie oft ist es bereits im Unterricht geschehen, dass Taschenrechnerergebnisse von mir angezweifelt wurden und dann auch tatsächlich falsch waren. Woran liegt das?

Primäre Ursache ist die fehlerhafte Eingabe von Zahlen und Befehlen! Einmal werden für die korrekte Berechnung erforderliche Klammern vergessen oder falsch gesetzt. Durch Tippfehler werden fehlerhafte Zahlen eingegeben. Oder es werden Zwischenergebnisse gerundet, und man wundert sich anschließend über den enormen Rundungsfehler, der gerade bei höheren Potenzen exponential anwächst. Doch allein Rundungsfehler der Taschenrechner, etwas geringer der PCs, können zu fehlerhaften Ergebnissen führen, wenn die Rechenoperationen in einer ungünstigen Reihenfolge ausgeführt werden! Und in der Vergangenheit ist es auch bereits vorgekommen, dass fehlerhafte CPUs ausgeliefert wurden, die bei bestimmten Rechenoperationen zu gewaltigen Rundungsfehlern führten. Dazu kommt, dass es eben auch keine perfekte und fehlerlose Software gibt. Wenn man bedenkt, dass ein einfaches Programm wie Excel bereits mehrere Hunderttausend bis Millionen codierte Programmzeilen enthält ist das eigentlich auch kein Wunder, denn nicht alle Eventualitäten und Grenzfälle können dabei vom Programmierer berücksichtigt werden.

Deshalb lautet eine der Grunddevisen bei der Nutzung elektronischer Rechenanlagen: Traue nie blind einem Taschenrechner oder Computer! Ergebnisse sollten daher grundsätzlich überprüft und im Kopf überschlagen werden, ob das Ergebnis tatsächlich korrekt sein kann!

Dazu ist es erforderlich, dass der User auch versteht, was der Computer oder Taschenrechner da überhaupt tut. Sonst wird er nämlich zum sogenannten DAU („Dümmster anzunehmender User“).

Andererseits kann es auch schon einmal vorkommen, dass der Anwender selbst Lösungen für ein ganz bestimmtes Problem bzw. für eine aus dem täglichen Arbeitsprozess herausragende Aufgabe selber finden muss, weil keine passende Software dafür zu Verfügung steht. Dann gilt es unter Umständen, eine Tabelle oder eine Datenbank selbst mit Leben zu füllen.

Die vielgeliebte Antwort: „Dann hole ich mir eben einen Experten, der das dann schon für mich regelt!“ ist oft keine Lösung, denn Fachleute sind sehr teuer und meist gerade dann, wenn man sie braucht, nicht verfügbar. Aber der Betrieb muss weiterlaufen. Und das Problem muss gelöst werden.

Hinzu kommt, dass gerade das Management und die Buchhaltung in jedem wirtschaftlich arbeitenden Unternehmen oft vor der entscheidenden Frage steht: „Arbeitet das Unternehmen noch wirtschaftlich?“ Oder die Geschäftsleitung steht vor der Aufgabe, eine Produktionslinie zu verändern oder zu erweitern und muss das Problem lösen, unter welchen Bedingungen diese betriebliche Veränderung zu realisieren ist.

Diese Fragen stellen sich jedoch nicht etwa nur in einem Produktionsbetrieb, sondern auch in jedem Einzel- oder Großhandel und auch in jedem Dienstleistungsbetrieb. Denn jede personelle Veränderung, jeder Neuerwerb von Geräten (auch Computern oder Kühltheken) und Maschinen (z.B. auch Firmenfahrzeuge, Gabelstapler o.ä.) zieht neben einmaligen (z.B. Anschaffungskosten) und / oder festen laufenden Kosten (z.B. Löhne, Abschreibungen) auch variable Kosten (z.B. Energiekosten, Wartungskosten etc.) nach sich. Bei den Erlösen können wir davon ausgehen, dass Stück Erlöse annähernd konstant bleiben, da wir selbst die Preise festlegen und uns lediglich an der Konkurrenz orientieren (Preisnachlässe aufgrund von Mengenrabatten o.ä. lassen wir erst einmal außer Acht). Die Erlösfunktion ist demnach also nur von der Produktions- bzw. Verkaufszahl abhängig, folgt also einer Geraden (lineare Funktion).

Zur Erzielung von Gewinnen oder mindestens zur Gewährleistung eines kostendeckenden Betriebes ist insofern die genaue Analyse des Kosten- und Erlösverlaufs erforderlich. Genau das ist die Aufgabe der Büromitarbeiter eines Unternehmens, die damit die Entscheidungen des Managements vorbereiten. In größeren Unternehmen gibt es dafür in der Regel eigens eine Planungsabteilung, sofern diese Aufgaben nicht von der Kostenrechnungsabteilung mit übernommen werden. In kleinen und mittleren Unternehmen fällt diese verantwortungsvolle Aufgabe meist der Buchhaltung bzw. der Geschäftsleitung zu.

## **Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktionen**

Wie wir bereits bei der Behandlung linearer Funktionen erörtert hatten, können Kosten, Erlöse und Gewinne in einen mathematischen Zusammenhang gebracht werden. Leider sind diese Zusammenhänge nicht immer ganz so einfach herzustellen, wie wir in den Beispielaufgaben zu linearen Funktionen gesehen hatten.

Oft sind die Funktionen für Kosten, Erlös und Gewinn sehr viel komplexer und nur durch quadratische oder Gleichungen dritten, vierten oder sogar noch höheren Grades darstellbar. Das liegt unter anderem daran, dass eine Vielzahl von Einflüssen das Verhalten von Käufern, Produzenten und Händlern beeinflusst. Einflüsse, die auf den ersten Blick gar nicht so einfach erkennbar und einzuordnen sind.

Bisher wurden bei den linearen Funktionen z.B. lediglich proportional variable Kosten und ein proportional variables Käuferverhalten (Nachfrage) angenommen, die sich im gleichen Verhältnis der Produktionsmenge veränderten. Aber es gibt auch Beispiele, in denen dies nicht so ist. Ähnlich wie die Betriebskosten eines Autos nicht nur von der gefahrenen Strecke, sondern auch von der Geschwindigkeit abhängt und selbst dabei nicht proportional zur Geschwindigkeit steigen, sondern bei steigender Fahrgeschwindigkeit stärker anwachsen, sind z.B. auch die Betriebskosten bei Maschinen je Produktionseinheit bei höheren Produktionsmengen deutlich höher (höherer Energieverbrauch, höherer Verschleiß, höherer Ausschuss, etc.). Ähnlich verhalten sich auch Verbraucher, die bei höherem Einkommen ggf. eher bereit sind, einen höheren Preis für ein Produkt zu bezahlen als bei geringem Einkommen.

Ein anderes Beispiel sind die Transportkosten, die bei größeren Mengen geringer ansteigen als bei niedrigen Mengen. So sind die auf eine Produktionseinheit entfallenden Kosten bei einer Menge von z.B. 10 Computerchips deutlich höher als beim Transport von 1000 Computerchips. Ebenso ist der Transport eines einzelnen Autos deutlich teurer als bei gleichzeitigem Transport von 10 oder gar hundert Autos.

Ein weiteres Beispiel ist der Personenverkehr: Eine Einzelfahrkarte ist bezogen auf die Beförderung einer einzelnen Person immer teurer als eine Mehrfahrtenkarte oder eine Gruppenfahrkarte.

Geringer steigende Kosten wie z.B. die Transportkosten werden dabei als **unterproportionale** Kosten bezeichnet, stärker steigende Kosten wie z.B. Überstundenlöhne als **überproportionale** Kosten. Daneben gibt es auch noch **Mischformen**, z.B. die Betriebskosten für Maschinen, die zunächst einmal bis zu einer bestimmten Produktionsmenge (optimale Auslastung) geringer ansteigen und bei noch höheren Produktionsmengen wieder stärker ansteigen (Überlastung).

Bei der Berücksichtigung von über- und unterproportionalen Kosten sowie von Mischformen ist der Verlauf der Kostenfunktion daher nicht linear.

Im folgenden (stark vereinfachten) Anwendungsbeispiel sollen diese Zusammenhänge und die damit verbundene Vorgehensweise näher erläutert werden:

**Aufgabenstellung:**

In einem Betrieb zur Herstellung von Elektroteilen wird der Verlauf der Gesamtkosten  $K$  durch eine Funktionsgleichung der Form  $K(x) = y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  bestimmt. In nachstehender Tabelle sind die Gesamtkosten  $K$  in Geldeinheiten (1 GE  $\hat{=}$  € 1.000) für  $x$  Mengeneinheiten (1 ME  $\hat{=}$  1.000 Stück) angegeben.

|    |        |    |    |    |    |
|----|--------|----|----|----|----|
| ME | x      | 0  | 2  | 4  | 6  |
| GE | $K(x)$ | 18 | 56 | 62 | 84 |

Der Erlös je ME beträgt 20 GE.

- Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für den Gesamtkostenverlauf!
- Wie lautet die Funktionsgleichung der Erlösgeraden  $E$ ?
- Zeichnen Sie mithilfe einer Wertetafel die Gesamtkostenkurve  $K$  und die Erlösgerade  $E$  in ein gemeinsames Achsenkreuz!  
Teilung der x-Achse: 1 ME  $\hat{=}$  1 cm. Teilung der y-Achse: 20 GE  $\hat{=}$  1 cm.
- Berechnen Sie die Schnittpunkte von Gesamtkostenkurve und Erlöskurve!  
Eine Lösung ist durch Probieren zu bestimmen. In welchem Bereich wird mit Gewinn produziert?
- Wie lautet die Gleichung der Gewinnfunktion? Zeichnen Sie in das Achsenkreuz von c) den Graphen der Gewinnfunktion! Lesen Sie aus dem Graphen einen Näherungswert für die x-Stelle ab, an der der Gesamtgewinn am höchsten ist (Gewinnmaximum)!
- Wie viel GE betragen die fixen Kosten? Wie lautet die Funktionsgleichung für die variablen Stückkosten  $K_v$ ?

**Lösungen:**

a) Gegebene Werte in die Funktionsgleichung  $K(x) = y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  einsetzen. Anschließend werden die Gleichungen durch äquivalente Umformung aufgelöst:

$$\begin{aligned}
 (0|18) \quad & d = 18 \quad (1) \\
 (2|56) \quad & 8a + 4b + 2c + d = 56 \quad (2) \\
 (4|62) \quad & 64a + 16b + 4c + d = 62 \quad (3) \\
 (6|84) \quad & 216a + 36b + 6c + d = 84 \quad (4) \\
 & 8a + 4b + 2c = 38 \quad (2a) = (1) \text{ in } (2) \text{ eingesetzt} \\
 & 64a + 16b + 4c = 44 \quad (3a) = (1) \text{ in } (3) \text{ eingesetzt} \\
 & 216a + 36b + 6c = 66 \quad (4a) = (1) \text{ in } (4) \text{ eingesetzt} \\
 & 4a + 2b + c = 19 \quad (2b) = (2a) : 2 \\
 & 16a + 4b + c = 11 \quad (3b) = (3a) : 4 \\
 & 36a + 6b + c = 11 \quad (4b) = (4a) : 6 \\
 & 4a + 2b + c = 19 \quad (2b) \\
 & -4b - 3c = -65 \quad (3c) = (3b) - (2b) \cdot 4 \\
 & -12b - 8c = -160 \quad (4c) = (4b) - (2b) \cdot 9 \\
 & 4a + 2b + c = 19 \quad (2b) \\
 & -4b - 3c = -65 \quad (3c) \\
 & c = 35 \quad (4d) = (4c) - (3c) \cdot 3 \\
 & -4b - 105 = -65 \quad (5) = (4d) \text{ in } (3c) \text{ eingesetzt} \\
 & b = -10 \quad (5a) \\
 & 4a - 20 + 35 = 19 \quad (6) = (5a) \text{ und } (4d) \text{ in } (2b) \text{ eingesetzt} \\
 & a = 1
 \end{aligned}$$

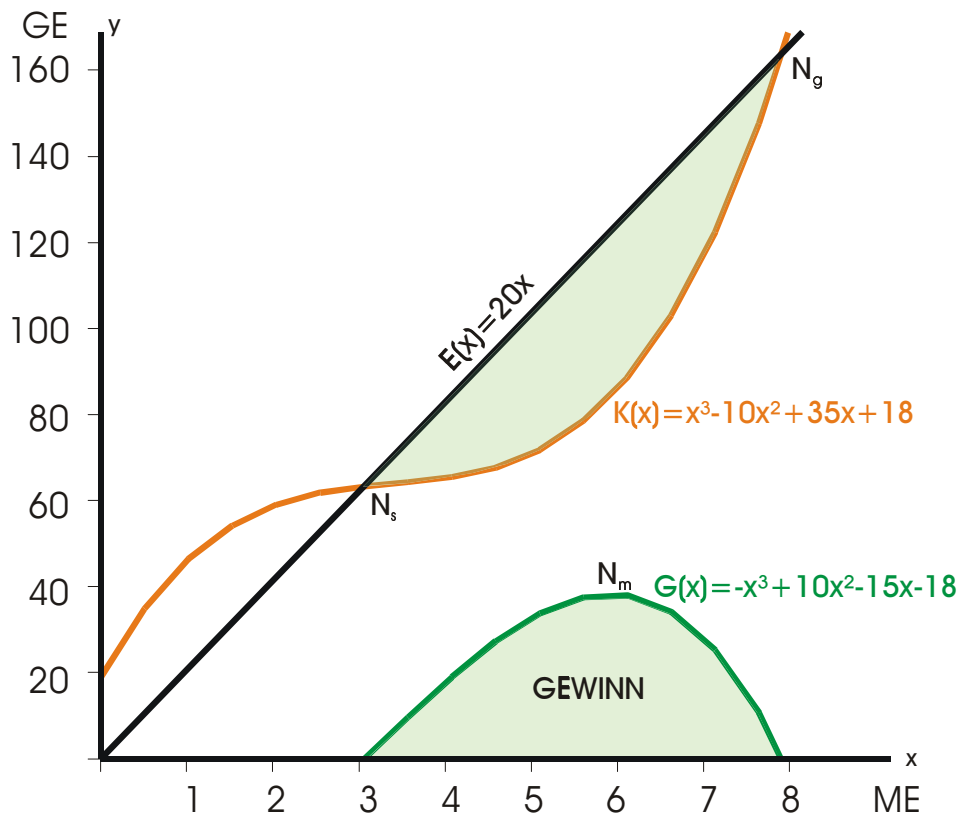
Die Gleichung der Gesamtkostenfunktion lautet also:

$$y = K(x) = x^3 - 10x^2 + 35x + 18$$

b) Die Gleichung der Erlösfunktion lautet:  $y = E(x) = 20x$ . Sie ist also eine Gerade mit der Steigung des Stückpreises.

c)

|                          |    |      |    |      |     |       |     |       |     |      |
|--------------------------|----|------|----|------|-----|-------|-----|-------|-----|------|
| x                        | 0  | 0,5  | 1  | 1,5  | 2   | 2,5   | 3   | 3,5   | 4   | 4,5  |
| $x^3 - 10x^2 + 35x + 18$ | 18 | 33,1 | 44 | 51,4 | 56  | 58,6  | 60  | 60,9  | 62  | 64,1 |
| 20x                      |    |      |    |      |     |       | 60  |       |     |      |
| x                        | 5  | 5,5  | 6  | 6,5  | 7   | 7,5   | 8   | 8,5   | 9   |      |
| $x^3 - 10x^2 + 35x + 18$ | 68 | 74,4 | 84 | 97,6 | 116 | 139,9 | 170 | 207,1 | 252 |      |
| 20x                      |    |      |    |      |     |       | 160 |       |     |      |



d)

$K(x) = y = x^3 - 10x^2 + 35x + 18$  (1) Gleichung der Gesamtkostenkurve K

$E(x) = y = 20x$  (2) Gleichung der Erlösgeraden E

$x^3 - 10x^2 + 35x + 18 = 20x$  (1) und (2) gleichsetzen

$x^3 - 10x^2 + 15x + 18 = 0$  | - 20x

Lösung von  $x_1$  durch Probieren herausfinden:  $x_1 = 3$ .

$(x^3 - 10x^2 + 15x + 18) : (x - 3) = x^2 - 7x - 6$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 \\ - 7x^2 + 15x + 18 \\ - 7x^2 + 21x \\ - 6x + 18 \\ - 6x + 18 \end{array}$$

$\Rightarrow x^2 - 7x - 6 = 0$

Eine Zerlegung in Linearfaktoren ist nicht möglich!

Daher wird die pq-Formel angewendet.

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{2,3} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 24}}{2}$$

$x_2 = 7,772$

$x_3 = -0,772$

Da weder Erlöse noch Kosten negativ sein können, ist die Lösung von  $x_3$  nicht vernünftig und wird daher verworfen.

Demzufolge wird in einem Bereich von  $3 ME < x < 7,772 ME$  mit Gewinn produziert.

Den Schnittpunkt  $N_s(3|60)$  bezeichnet man dabei als Gewinnschwelle; den zweiten Schnittpunkt  $N_g(7,772|155,440)$  als Nutzengrenze.

Mit anderen Worten:

Bei einer Produktion von 3.000 Stück betragen sowohl die Gesamtkosten als auch der Gesamterlös € 60.000. Bei einer Produktionsmenge von 7.772 Stück betragen sowohl die Gesamtkosten als auch der Gesamterlös € 155.440. Stückkosten und Stückerlöse sind in beiden Fällen € 20.

Bei einer Produktion von 3.001 bis 7.771 Stück liegt der Gesamterlös größer als die Gesamtkosten. In diesem Bereich wird also Gewinn erwirtschaftet.

e) Berechnung der Gleichung der Gewinnfunktion:

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

$$G(x) = 20x - (x^3 - 10x^2 + 35x + 18)$$

$$G(x) = 20x - x^3 + 10x^2 - 35x - 18$$

$$G(x) = -x^3 + 10x^2 - 15x - 18 \quad \text{Gewinnfunktion}$$

|                           |      |   |     |    |      |    |      |      |    |      |    |      |      |     |
|---------------------------|------|---|-----|----|------|----|------|------|----|------|----|------|------|-----|
| x                         | 2,5  | 3 | 3,5 | 4  | 4,5  | 5  | 5,5  | 5,8  | 6  | 6,5  | 7  | 7,5  | 7,77 | 8   |
| $-x^3 + 10x^2 - 15x - 18$ | -8,6 | 0 | 9,1 | 18 | 25,9 | 32 | 35,6 | 36,3 | 36 | 32,4 | 24 | 10,1 | 0    | -10 |

Das Gewinnmaximum liegt knapp unter 6 ME. Der genaue Wert ist mithilfe der Differenzialrechnung zu bestimmen, denn es gilt ja:

$$G'(x) = -3x^2 + 20x - 15 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 180}}{-6} = \frac{-20 \pm \sqrt{220}}{-6}$$

$$x_1 = 0,861$$

$$x_2 = 5,805$$

Gemäß den Erkenntnissen bei quadratischen Gleichungen haben wir wieder zwei Lösungen. Mithilfe der 2. Ableitung lässt sich herausfinden, ob  $x_1$  und  $x_2$  Maxima sind oder ob wenigstens eine Lösung eventuell ein Minimum ist:

$$G''(x) = -6x + 20$$

Einsetzen der Lösungen aus der ersten Ableitung:

$$x_1 = 0,861 \quad G''(x) = (-6) \cdot 0,861 + 20 = 14,834$$

$14,834 > 0 \Rightarrow x_1$  ist ein Minimum!

$$x_2 = 5,805 \quad G''(x) = (-6) \cdot 5,805 + 20 = -14,830$$

$-14,830 < 0 \Rightarrow x_2$  ist ein Maximum!

Das Gewinnmaximum ist also bei 5,805 ME bzw. 5805 Stück erreicht.

Bei 5.805 Stück wird damit ein Erlös von €116.100 und der maximale Gewinn von € 36.288,20 erzielt.

- f) Die Fixkosten betragen  $K(0) = d = 18 \text{ GE}$ .

Funktionsgleichungen für:

Gesamtkosten (Fixkosten+variable Kosten):  $K(x) = x^3 - 10x^2 + 35x + 18$

Variable Gesamtkosten:  $K_v(x) = x^3 - 10x^2 + 35x$

Für die variablen Stückkosten ist entsprechend der Definition:

*Stückkosten*=*Gesamtkosten pro Stück* die Gleichung der variablen Gesamtkosten nur durch die Stückzahl  $x$  zu teilen:

$$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = \frac{x^3 - 10x^2 + 35x}{x} = x^2 - 10x + 35$$

Die Gesamtstückkosten einschließlich der Fixkosten lässt sich so einfach nicht bestimmen, da der Anteil der Fixkosten mit zunehmender Produktion abnimmt, selbst also ebenfalls wieder durch eine eigene (gebrochenrationale) Funktion der Form  $x^2 - 10x + 35 + \frac{18}{x}$  bestimmt wird. Zu den gebrochenrationalen Funktionen kommen wir aber erst in den nächsten Stunden.