

Finanzmathematik (Teil III)

Bei der Aufnahme eines Kredites entsteht eine Schuld gegenüber dem Kreditgeber, für gewöhnlich einem Kreditinstitut. Diese Schulden sind zurückzuzahlen und werden bis zur vollständigen Rückzahlung (Tilgung) verzinst. Die Tilgungsrate T zuzüglich der geschuldeten Zinsen z ergeben die Annuität A . Generell wird dabei zwischen der **Ratentilgung** und der **Annuitätentilgung** differenziert.

Bei der **Ratentilgung** bleibt die jährliche Tilgungsrate T während der gesamten Tilgungsdauer gleich. Die Restschuld nimmt daher mit jedem Jahr linear ab. Da die Zinsen jeweils von der Restschuld berechnet und damit jährlich geringer werden, **sinkt** auch die Annuität A , die sich aus der Tilgungsrate T (konstant) und den Zinsen z (werden geringer) zusammensetzt.

Bei der **Annuitätentilgung** wird die Annuität A konstant gehalten. Da die aus der Restschuld berechneten Zinsen z sinken, muss zwangsläufig die Tilgungsrate T **steigen**, da die Summe aus Tilgungsrate und Zinsen gleich bleiben muss. Das hat zur Folge, dass die Schulden mit jedem Jahr schneller sinken.

Die Unterschiede sollen in der folgenden Tabelle noch einmal gegenübergestellt werden:

Ratentilgung	Annuitätentilgung
Tilgungsrate konstant	Tilgungsrate steigt
Zinsen sinken	Zinsen sinken
Annuität sinkt	Annuität konstant
D.h. die Belastung ist zu Beginn der Kreditrückzahlung am höchsten.	D.h. die Belastung bleibt während der gesamten Kreditlaufzeit gleich.
Bei gleicher Laufzeit ist die anfängliche Annuität höher als bei der Annuitätentilgung.	Bei gleicher Laufzeit ist die Annuität zu Beginn der Kreditrückzahlung geringer, am Ende höher als bei der Ratentilgung.
Bei gleicher anfänglicher Annuität dauert die Rückzahlung länger als bei der Annuitätentilgung.	Bei gleicher anfänglicher Annuität ist der Kredit schneller getilgt als bei der Ratentilgung.

Dazu jeweils ein Beispiel:

Ein Darlehen K in Höhe von € 150.000,00 wird zu 8 % verzinst. Das Darlehen soll innerhalb von 6 Jahren zurückgezahlt werden.

a) Annuitätentilgung

Es sind 6 gleich große Annuitäten zu berechnen.

$$1. \text{ Jahr: } A = K \cdot \frac{p}{100} + T_1$$

2. Jahr:

$$A = (K - T_1) \cdot \frac{p}{100} + T_2$$

\Rightarrow

$$K \cdot \frac{p}{100} + T_1 = (K - T_1) \cdot \frac{p}{100} + T_2 = K \cdot \frac{p}{100} - T_1 \cdot \frac{p}{100} + T_2 \quad | -K \cdot \frac{p}{100}$$

$$T_1 = T_2 - T_1 \cdot \frac{p}{100} \quad | +T_1 \cdot \frac{p}{100}$$

$$T_1 + T_1 \cdot \frac{p}{100} = T_2$$

$$T_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = T_2$$

3. Jahr:

$$A = (K - T_1 - T_2) \cdot \frac{p}{100} + T_3$$

\Rightarrow

$$K \cdot \frac{p}{100} + T_1 = (K - T_1 - T_2) \cdot \frac{p}{100} + T_3 = K \cdot \frac{p}{100} - T_1 \cdot \frac{p}{100} - T_2 \cdot \frac{p}{100} + T_3 \quad | -K \cdot \frac{p}{100}$$

$$T_1 = T_3 - T_1 \cdot \frac{p}{100} - T_2 \cdot \frac{p}{100} = T_3 - T_1 \cdot \frac{p}{100} - T_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) \cdot \frac{p}{100} \quad | +T_1 \cdot \frac{p}{100} + T_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) \cdot \frac{p}{100}$$

$$T_3 = T_1 + T_1 \cdot \frac{p}{100} + T_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) \cdot \frac{p}{100} = T_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) + T_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) \cdot \frac{p}{100}$$

$$T_3 = T_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right) \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

$$T_3 = T_1 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2$$

Für den Ausdruck $\left(1 + \frac{p}{100} \right)$ können wir wieder q einsetzen, so dass sich die Gleichungen vereinfachen zu:

$T_2 = T_1 \cdot q; T_3 = T_1 \cdot q^2; \dots; T_n = T_1 \cdot q^{n-1}$ und damit eine geometrische Folge bilden.

Die Summe aller Tilgungsbeträge ergibt das Darlehen K :

$$K = T_1 \cdot q + T_1 \cdot q^2 + T_1 \cdot q^3 + \dots + T_1 \cdot q^{n-1}$$

\Rightarrow (vgl. Rentenrechnung!)

$$K = \frac{T_1 (q^n - 1)}{(q - 1)}$$

Die Annuität ergibt sich zu:

$$A = K \cdot \frac{p}{100} + T_1 \quad | q = 1 + \frac{p}{100} \Rightarrow q - 1 = \frac{p}{100}$$

$$A = K (q - 1) + T_1 \quad | -T_1$$

$$A - T_1 = K (q - 1) \quad | / (q - 1)$$

$$\frac{A - T_1}{(q - 1)} = K$$

Wir haben nun zwei Gleichungen zur Berechnung von K . Setzen wir beide Gleichungen nun zu einer zusammen, ergibt sich:

$$\frac{T_1(q^n - 1)}{(q - 1)} = \frac{A - T_1}{(q - 1)} \quad | \cdot (q - 1)$$

$$T_1(q^n - 1) = A - T_1$$

$$T_1 \cdot q^n - T_1 = A - T_1 \quad | + T_1$$

$$T_1 \cdot q^n = A$$

$$\text{Nun ist aber auch: } \begin{array}{l} A = K(q - 1) + T_1 \quad | - K(q - 1) \\ A - K(q - 1) = T_1 \end{array},$$

so dass wir einsetzen können:

$$(A - K(q - 1)) \cdot q^n = A$$

$$A \cdot q^n - K(q - 1) \cdot q^n = A \quad | - A; + K(q - 1) \cdot q^n$$

$$K(q - 1) \cdot q^n = A \cdot q^n - A$$

$$K(q - 1) \cdot q^n = A(q^n - 1) \quad | / (q^n - 1)$$

$$\frac{Kq^n(q - 1)}{(q^n - 1)} = A$$

Auf diese Weise kann die Annuität lediglich aus der Schuldhöhe K und dem Zinssatz bestimmt werden.

Für unser Beispiel ergibt sich also:

$$A = \frac{150000 \cdot 1,08^6 \cdot 0,08}{(1,08^6 - 1)} = 32447,31.$$

Bei monatlicher Zahlung wird die Annuität durch 12 geteilt, so dass sich eine monatliche Rate von € 2703,95 ergibt. Die Raten bleiben für die Dauer der Laufzeit gleich!

b) Ratentilgung

Bei der Ratentilgung ergibt sich die anfängliche Jahresrate durch Division der Schuldhöhe durch die Laufzeit zuzüglich der anfänglichen Zinsen:

$$T = \frac{K}{n} = \frac{150000}{6} = 25000$$

$$Z_1 = K \frac{p}{100} = 150000 \cdot \frac{8}{100} = 12000$$

$$A_1 = T + Z_1 = 25000 + 12000 = 37000$$

Damit ist die erste Jahresrate um € 4552,69 höher als bei der Annuitätentilgung.

$$A_2 = T + (K - T) \frac{p}{100}$$

$$A_3 = T + (K - T - T) \frac{p}{100} = T + (K - 2T) \frac{p}{100}$$

$$A_4 = T + (K - 3T) \frac{p}{100}$$

$$A_n = T + (K - (n-1)T) \frac{p}{100}$$

Es stellt sich nun die Frage, nach welchem Zeitpunkt die jährlichen Raten nach der Annuitätentilgung und der Ratentilgung gleich groß sind. Dazu vergleichen wir die gleichbleibende Annuität mit den jährlichen Raten der Ratentilgung und stellen fest, dass im 3. Jahr die Rate bei € 33.000 liegt, im 4. Jahr bei € 31.000. Das klingt auch logisch, weil damit beide Raten nach etwa der Hälfte der Darlehenslaufzeit gleich sein muss.