Finanzmathematik (Teil II)

Rentenrechnung

Renten sind Zahlungen, die in gleichbleibenden Raten und in gleichen Zeitabständen geleistet werden. Das ist nicht nur bei der Altersrente der Fall (auch wenn sie die bekannteste Form ist), sondern gilt z.B. auch für Sparverträge, in denen gleichbleibende monatliche Zahlungen vereinbart wurden oder auch regelmäßige Unterhaltszahlungen aus einem vorher angesparten bzw. eingezahlten Fond.

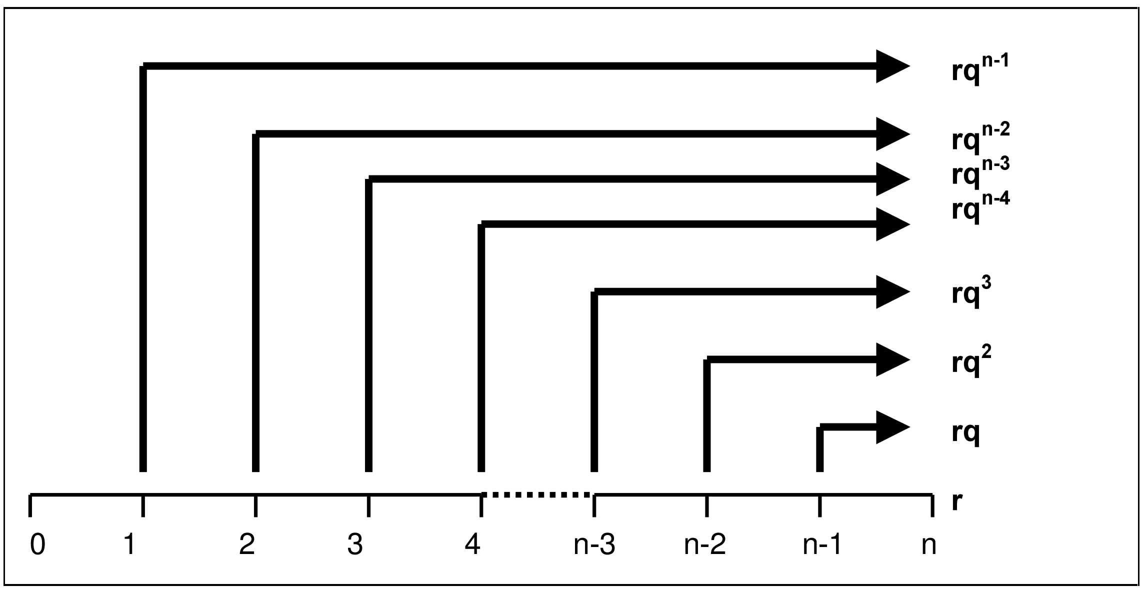
Von den endlichen Renten, die über einen befristeten (endlichen) Zeitraum gezahlt werden, unterscheidet man die zeitlich unbegrenzte ewige Rente. Hinsichtlich des Zahlungszeitraumes können noch die nachschüssige (Zahlungen werden am Ende des jeweiligen Zeitabraums geleistet) und die vorschüssige (Zahlungen werden zu Beginn des jeweiligen Zeitraums geleistet) Rente unterschieden werden.

Rentenendwert, Rente und Zeit

Nachschüssige Berechnung

Renten setzen sich im Regelfall zusammen aus den regelmäßigen Zahlungen und der Verzinsung.

Die nachschüssige Berechnung des Rentenendwertes lässt sich am einfachsten auf einem Zeitstrahl veranschaulichen:



Wird also eine Rente n mal am Ende eines jeden Zeitraums (Monat, Jahr o.ä.) gezahlt, dann beträgt der Rentenwert am Ende des n. Zeitraums **r** (wenn wir rückwärts mit der Berechnung beginnen). Am Ende des zurückliegenden Zeitraums (n-1) wurden die Zahlungen bereits einmal verzinst (Zinseszinsen!!), also ist die Rente mit dem Aufzinsungsfaktor $\mathbf{q^1=q}$ zu multiplizieren: **rq**. Gehen wir noch einen weiteren Zeitraum zurück, ist die Rente bereits zweimal verzinst worden: $\mathbf{rq^2}$ usw. Jedes Mal kommt aber eine weitere Rentenzahlung hinzu, so dass wir folgende geometrische Reihe aufstellen können:

$$R_n = r + rq + rq^2 + ... + rq^{n-2} + rq^{n-1}$$

Die Rente r wiederholt sich, da sie stets gleich bleibt. Durch Ausklammern könnte daher der Ausdruck vereinfacht werden:

$$R_n = r\left(1 + q + q^2 + ... + q^{n-2} + q^{n-1}\right)$$

Eine geometrische Reihe der obigen Form lässt sich weiter vereinfachen zu:

$$R_n = \frac{r\left(q^n - 1\right)}{\left(q-1\right)}$$ (nachschüssiger Rentenendwert)

Durch Umformung der Gleichung lassen sich dann auch sowohl der Zins, als auch die Zeit und die Rente bestimmen (vorausgesetzt, die anderen Werte sind bekannt).

Vorschüssige Berechnung

Bei der vorschüssigen Berechnung wird die Rente bereits während des ersten Zahlungszeitraums verzinst! Die geometrische Reihe der Rentenzahlungen verändert sich also wie folgt:

$$\overline{R_n} = rq + rq^2 + rq^3 + ... + rq^{n-1} + rq^n$$

$$\Rightarrow \overline{R_n} = rq\left(1 + q + q^2 + ... + q^{n-2} + q^{n-1}\right)$$

Da der Restterm gleichgeblieben ist, können wir nun die Rentenformel anpassen:

$$\overline{R_n} = \frac{rq\left(q^n - 1\right)}{\left(q-1\right)}$$ (vorschüssiger Rentenendwert)

Auch hier lassen sich dann durch Umformung der Gleichung sowohl der Zins, als auch die Zeit und die Rente bestimmen.

Der Quotient $\frac{\left(q^n - 1\right)}{\left(q-1\right)}$ heißt **Rentenendwertfaktor** und ist unabhängig von vor- oder nachschüssiger Rentenrechnung.

Rentenbarwert, Rente und Zeit

Neben der vorausschauenden Berechnung des Rentenendwertes kann auch die Berechnung des Rentenbarwertes sinnvoll sein. Durch die einmalige Zahlung eines Betrages soll z.B. eine bestimmte jährliche oder monatliche Rentenleistung erzielt werden. Gefragt ist dann natürlich, wie hoch dieser Betrag unter Annahme eines durchschnittlichen Zinssatzes sein muss, damit diese Rentenzahlungen tatsächlich erreicht werden können.

Nachschüssige Berechnung

Geht man von einer endlichen Rente aus (z.B. 15 Jahre lang), dann lässt sich aus dem Zinssatz, dem Zeitraum und der Rente ein Rentenendwert berechnen, der ja den Zahlungen zugrunde liegen muss. Wird der Rentenbarwert mit den Zinsen gemäß der Zinseszinsformel über den Rentenzahlungszeitraum verzinst, muss das Ergebnis der Rentenendwert sein. Folglich gilt folgender Zusammenhang:

$$R_0 \cdot q^n = R_n = \frac{r\left(q^n - 1\right)}{\left(q-1\right)}$$ (nachschüssige Schuldentilgungsformel).

Durch Umformung erhalten wir:

$$R_0 = \frac{r\left(q^n - 1\right)}{q^n\left(q-1\right)}$$ (nachschüssiger Rentenbarwert),

der Rentenendwert ist also abgezinst worden.

Auch hier lassen sich durch Umformung der Gleichung alle anderen Parameter bestimmen.

Veränderungen des Kapitals durch regelmäßige Ein- und Auszahlungen

Betrachten wir einen Sparvertrag, bei dem ein bestimmtes Ausgangskapital um gleichbleibende Zahlungen über einen Zeitraum von n Jahren erhöht werden soll, so wird das Ausgangskapital K_0 wie gewohnt mit der Zinseszinsformel verzinst. Hinzuzurechnen ist nun jedoch die Kapitalvergrößerung durch die künftigen Zahlungen mithilfe der Rentenformel:

$$E_n = K_0 q^n \pm \frac{r\left(q^n - 1\right)}{\left(q-1\right)} \quad \text{bzw.} \quad \overline{E_n} = K_0 q^n \pm \frac{rq\left(q^n - 1\right)}{\left(q-1\right)}$$

nachschüssige und **vorschüssige**

Sparkassenformel

Werden die Renten eingezahlt und vergrößert sich dadurch das Kapital, dann werden die Renten samt Zinsen zum verzinsten Ausgangskapital addiert, andernfalls subtrahiert.