Finanzmathematik (Teil I)

Ein wesentliches Anwendungsgebiet der Mathematik ist die Finanzmathematik. Unter diesem Begriff werden die Zinsrechnung, die Zinseszinsrechnung und bestimmte Anwendungsformen der Algebra und Analysis zusammengefasst.

Zu den wichtigsten Grundlagen gehören neben den allgemeinen Grundrechenarten das Prozentrechnen, das Potenzrechnen und das Logarithmieren auf der einen Seite. Auf der anderen Seite sind im Bereich der Algebra die Begriffe der Folgen und Reihen sowie das Gleichungsrechnen, im Bereich der Analysis die Polynomdivision, das Rechnen mit Funktionen und die Differenziation von großer Bedeutung.

Viele im Folgenden „neu“ behandelte Begriffe werden bekannt vorkommen und leiten sich in der Tat recht einfach aus dem bisher Gelernten ab. Zins- und Zinseszinsrechnen werden als bekannt vorausgesetzt.

Die Abschreibung von Wirtschaftsgütern

Der Begriff der Abschreibung steht für die Wertminderung von Gebrauchsgütern während ihrer erwarteten Lebens- bzw. (genauer) Nutzungsdauer aufgrund ihrer Abnutzung. Erwartet man von einem Auto eine Nutzungsdauer von z.B. 5 Jahren, wird der Anschaffungswert über diesen Zeitraum „abgeschrieben“. Dabei ist zwischen den Formen der linearen Abschreibung und der degressiven Abschreibung zu unterscheiden. Daneben gibt es die Möglichkeit der Sonderabschreibung, wenn die Nutzung eines Gebrauchsgutes bereits vor der erwarteten Nutzungsdauer aufgegeben wird.

Die Höhe der planmäßigen Abschreibung richtet sich nach der betriebsgewöhnlichen Nutzungsdauer des Wirtschaftsgutes als jährlicher Prozentsatz.

Damit liegen die Zusammenhänge zur Zins- und Zinseszinsrechnung auf der Hand.

Lineare Abschreibung

Bei der linearen Abschreibung wird der Anschaffungswert eines Wirtschaftsgutes durch jährlich gleich große Abschreibungsbeträge gemindert. Der Anschaffungswert bildet dabei den Ausgangspunkt. Die betriebsgewöhnliche Nutzungsdauer von *n* Jahren wird gleich 100 % gesetzt. Der jährliche Abschreibungssatz *p%* ergibt sich durch Division von 100 % durch *n*: $p\% = \frac{100\%}{n\,Jahre}$.

Daraus berechnet sich der jährliche Abschreibungswert aus der Multiplikation des Abschreibungssatzes mit dem Anschaffungswert:

$$P = A \bullet p\% = A \bullet \tfrac{p}{100}\,.$$

Der Restwert eines Wirtschaftsgutes bestimmt sich demzufolge aus der Differenz aus dem Anschaffungswert und der über *n* Jahre aufsummierten Abschreibungsbeträge:

$$R = A - n \bullet P = A - n \bullet A \bullet \tfrac{p}{100} = A\left(1 - n \bullet \tfrac{p}{100}\right).$$

Damit wird die Analogie zur Zinsrechnung schon recht deutlich: Wurden bei der Zinsrechnung die jährlichen Zinsen dem Grundkapital aufaddiert, werden bei der linearen Abschreibung die jährlichen Abschreibungsbeträge vom Anschaffungswert subtrahiert.

Ausgangspunkt der Berechnung aller Abschreibungsbeträge bildet bei der linearen Abschreibung stets der Anschaffungswert!

Degressive Abschreibung

Im Gegensatz dazu steht die degressive Abschreibung, die jeweils vom jährlich zu berechnenden Restwert des Wirtschaftsgutes berechnet wird. Die Abschreibungsbeträge verringern sich daher bei gleichbleibendem Abschreibungssatz von Jahr zu Jahr! Eine weitere Folge ist, dass das Wirtschaftsgut am Ende der Nutzungsdauer nicht vollständig abgeschrieben sein kann, weil der Abschreibungssatz immer konstant ist und vom Restwert des vorherigen Jahres ermittelt wird.

Sinn der degressiven Abschreibung ist es, zu Beginn der Nutzungsdauer höhere Abschreibungsbeträge und damit auch Steuerersparnisse zu ermöglichen, um die finanziellen Lasten der Anschaffungskosten zu mildern. Dabei gelten aber auch nach dem Einkommensteuergesetz bestimmte Regeln:

1. Die Höhe des degressiven Abschreibungssatzes darf maximal das **Zweifache** des linearen Abschreibungssatzes betragen.
2. Die Höhe des degressiven Abschreibungssatzes ist auf maximal **20%** zu begrenzen.

Diese Einschränkungen wiederum bedeuten, dass eine degressive Abschreibung sich nur für langlebige Wirtschaftsgüter mit einer Nutzungsdauer von mindestens 6 Jahren lohnt. Denn bei 5-jähriger Nutzungsdauer beträgt der lineare Abschreibungssatz bereits 20% und ist damit genau so hoch wie der höchstzulässige degressive Abschreibungssatz.

Ähnlich der Zinseszinsrechnung wird nun auch der Restwert nach *n* Abschreibungsjahren ermittelt.

Wir stellen zunächst eine theoretische Abschreibungstabelle auf, um die degressive Abschreibungsformel herzuleiten:

1. Jahr $R_1 = A\left(1-\frac{p}{100}\right)$ (lineare Abschreibungsformel, da n=1)

2. Jahr $R_2 = R_1\left(1-\frac{p}{100}\right) = A\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right) = A\left(1-\frac{p}{100}\right)^2$

3. Jahr $R_3 = R_2\left(1-\frac{p}{100}\right) = A\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{p}{100}\right) = A\left(1-\frac{p}{100}\right)^3$

...

n. Jahr $R_n = A\left(1-\frac{p}{100}\right)^n$

Die Restwerte R_1, R_2, R_3, ..., R_n bilden eine fallende geometrische Folge mit $q = 1-\frac{p}{100}$. Daraus ergibt sich für die Restwerte nach Abschreibung die Exponentialgleichung $R_n = A\left(1-\frac{p}{100}\right)^n$.

Die Abschreibungswerte a_0, a_1, a_2, ..., a_n bilden ebenfalls eine fallende geometrische Folge mit $q = 1-\frac{p}{100}$. Daraus ergibt sich die Exponentialgleichung:

$$a_n = a_1\left(1-\frac{p}{100}\right)^{n-1} = a_1 \bullet q^{n-1}$$