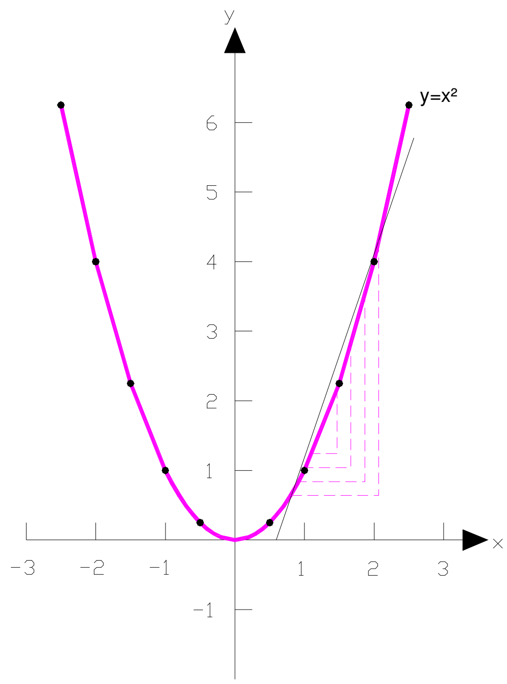
Differenziation ganzrationaler Funktionen

Einführung

Die bisherigen Betrachtungen von quadratischen Funktionen und Gleichungen befassten sich mit der definierten Zuordnung einer unabhängigen (x) zu einer abhängigen (y) Variablen. Die unabhängige x-Variable konnte frei aus dem Definitionsbereich gewählt werden. Über die Zuordnungsvorschrift (Funktionsgleichung) konnte die abhängige y-Variable bestimmt werden.

Für die abhängige Variable schreibt man statt y auch f(x), g(x), E(x) usw., um den von der unabhängigen x-Variablen abhängigen Funktionswert besser zu kennzeichnen.

Will man eine Funktion näher analysieren, ist es auch wichtig, andere Funktionsmerkmale zu betrachten, so z.B. auch die Änderungstendenz einer Funktion bzw. die Steigung oder Steilheit des Funktionsgraphen in einem bestimmten Punkt bzw. einem definierten Funktionsbereich.



Näherungsweise kann die Steigung in einem definierten Punkt auch über die Betrachtung immer kleiner werdender Funktionsabschnitte ermittelt werden, wie dies in der Grafik einer Parabel oben dargestellt ist. Dazu wird durch je einen Punkt oberhalb und unterhalb des zu untersuchenden Punktes auf dem Graphen eine Gerade (Sekante) gezogen. In den folgenden Schritten werden diese beiden Punkte immer näher an den zu untersuchenden Punkt herangerückt, der Untersuchungsabschnitt der Funktion also immer enger gewählt. Für das Verhältnis der Koordinaten dieser beiden Punkte zueinander sagt man auch **Δx** (sprich: Delta x) und **Δy**. Werden beide Punkte beliebig nah zueinander gerückt, bewegen sich also **Δx** und **Δy** gegen Null, bezeichnet man diese auch als **dx** und **dy**.

Die Variation des Funktionswertes $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ wird auch als Differenzenquotient bezeichnet und definiert die Steigung dieser Sekanten sowie die mittlere Steigung des durch die Sekante geschnittenen Graphen.

Der Grenzfall für beliebig kleine Δ**x** und Δ**y** wird durch die Tangente in einem Punkt des Graphen gebildet. D.h. die beiden Schnittpunkte der Sekante sind dann identisch. Die Tangente gibt dann die genaue Steigung des Graphen in deren Berührungspunkt mit dem Graphen an.

Der Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ wird an dieser Stelle zum Diffenzialquotienten $\frac{df(x)}{dx}$. Die Katheten des Steigungsdreiecks der Tangente heißen Differenziale, also Differenzial $df(x)$ und Differenzial dx.

Der Steigungswert in einem Kurvenpunkt ***P*** mit den Koordinaten x_p und $f(x_p)$ heißt Ableitung der Funktion an der Stelle x_p und wird mit $f'(x_p)$ bezeichnet.

Ableitungsregeln

1. Lineare Funktionen:

   Für $f(x) = a \quad (a \in \mathbb{R}, D = \mathbb{R})$ gilt: $f'(x) = \frac{da}{dx} = 0$

   Für $f(x) = m \bullet x \quad (m \in \mathbb{R}, D = \mathbb{R})$ gilt: $f'(x) = \frac{d(m \bullet x)}{dx} = m$

2. quadratische Funktionen

   Für $f(x) = x^2 \quad (D = \mathbb{R})$ gilt: $f'(x) = \frac{dx^2}{dx} = 2x$.

   Für $f(x) = m \bullet x^2 \quad (m \in \mathbb{R}, D = \mathbb{R})$ gilt: $f'(x) = \frac{d\left(m \bullet x^2\right)}{dx} = 2mx$.

3. Beliebige Potenzfunktionen

   Für $f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N},\ D = \mathbb{R})$ gilt: $f'(x) = \frac{dx^n}{dx} = n \bullet x^{(n-1)}$.

   Für $f(x) = m \bullet x^n \quad (n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{R}, D = \mathbb{R})$ gilt: $f'(x) = \frac{d\left(m \bullet x^n\right)}{dx} = nmx^{(n-1)}$.