

AUFFRISCHUNGSKURS IN MATHEMATIK WINTERSEMESTER 2001/02

Manfred Kronz*

Inhaltsverzeichnis

Test	2
1 Zahlbereiche und Rechenregeln	3
2 Mathematische Symbole	4
3 Gleichungen	5
4 Prozentrechnung	6
5 Dreisatz	6
6 Binomische Formeln	8
7 Quadratische Gleichungen	9
8 Wurzelgleichungen	12
9 Potenzen und allgemeine Wurzeln	12
10 Logarithmen	14
11 Funktionen	15
12 Logarithmus- und Exponentialfunktionen	17
Abschlusstest	20
Hinweise zu den Lösungen	21

*E-Mail: kronz@mi.uni-erlangen.de

TEST

Die folgenden Aufgaben dienen der Selbstüberprüfung Ihres Kenntnisstandes.

1. Ordnen Sie folgende Zahlen nach ihrer Größe:

$$\frac{11}{12}, 0,66, \frac{2}{3}, \frac{12}{11}, 0,66667, \frac{1002}{1001}, \frac{13}{20}.$$

2. Bei einem Einkauf bietet Ihnen der Großhändler 10% Rabatt an. Dabei überlässt er Ihnen die Entscheidung, ob zunächst vom Nettopreis die 10% Rabatt abgezogen und anschließend 16% Mehrwertsteuer aufgeschlagen werden, oder ob auf den Nettopreis zuerst die 16% Mehrwertsteuer aufgeschlagen werden und dann erst der Rabatt von 10% abgezogen wird. Welche Alternative ist günstiger? Geben Sie eine kurze Begründung.
3. Schätzen Sie: Wie hoch muss der Montblanc (Höhe ≈ 4800 m) auf einem Globus von einem Meter Durchmesser maßstabgetreu dargestellt werden? (Der Erdradius beträgt etwa 6400 km.)
4. a) Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke in einen Bruch:

$$\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{8}{3}}, \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + b.$$

- b) Lösen Sie nach x bzw. y auf:

$$1 + \frac{1}{x} = 3, \quad 2 + y = \frac{y^2}{y-1}.$$

5. Welche der folgenden Zahlen sind gleich?

$$2, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \left(\sqrt{2\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}}, \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{4}}, \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, \sqrt{3\sqrt{27}}, \left(\sqrt{3} + \sqrt{12} \right)^{\sqrt{3}}.$$

6. a) Was sind die Binomischen Formeln?

- b) Bestimmen Sie die Lösungen x von $x^2 + 4x - 12 = 0$.

7. Zeichnen Sie ein Pascalsches Dreieck und multiplizieren Sie den Ausdruck $(a+b)^5$ aus.

8. Sie wollen Geld ein Jahr lang bei einer Bank anlegen. Eine Bank bietet Ihnen einen Jahreszinsfuß von 6%. Eine andere Bank arbeitet mit vierteljährlicher Verzinsung bei einem Zinsfuß von 1,5% pro Vierteljahr ($4 \cdot 1,5 = 6$). Welches Angebot ist günstiger (und warum)?

9. a) Vereinfachen Sie die folgenden Terme:

$$\log_6 2 + \frac{1}{\log_3 6}, \quad \frac{2}{3} \log_a \sqrt{a^b} + \frac{b}{3} \log_a \sqrt{a^4} \quad (0 < a \neq 1 \text{ und } b \text{ beliebig}).$$

- b) Bestimmen Sie alle Lösungen x bzw. y der Gleichungen $3^{2x+4} = 9^{x(x+1)}$ und $y^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{y}}$.

10. Welche der folgenden mathematischen Symbole und Abkürzungen kennen Sie (noch)?

$$\pi, \sqrt[k]{a}, |a|, k!, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, >, \leq, \infty, \sum_{i=1}^n, \log_b, \ln, e, \binom{n}{k}, \lim_{n \rightarrow \infty}.$$

1 Zahlbereiche und Rechenregeln

Die in der Schulmathematik betrachteten Zahlbereiche sind die Menge der *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, die Menge der *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, die Menge der *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ sowie die Menge der *reellen Zahlen* \mathbb{R} . Die Menge \mathbb{R} kann man sich als die Menge der Dezimalbrüche (sowas wie $3,141592\dots$ oder $-1,010010001\dots$) oder auch als die Menge aller Punkte auf der Zahlengeraden veranschaulichen. In diesen Zahlbereichen kann man addieren und multiplizieren, wobei die folgenden Rechengesetze gelten:

$$a + b = b + a, \quad (a + b) + c = a + (b + c), \quad a + 0 = a, \quad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0,$$

$$a \cdot b = b \cdot a, \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \quad a \cdot 1 = a, \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Bei der letzten Rechenregel (dem *Distributivgesetz*) haben wir schon die Konvention *Punktrechnung vor Strichrechnung* benutzt. Oft lässt man bei der Multiplikation den „ \cdot “ einfach weg und schreibt ab statt $a \cdot b$. Eine weitere wichtige Regel für die Multiplikation ist die Vorzeichenregel „*Minus mal Minus gibt Plus*“.

Als *inverse* Operation zur Addition und Multiplikation gibt es die *Subtraktion* und *Division*, für die abermals gewisse Rechenregeln gelten, z.B. „*durch Null darf nicht geteilt werden*“, $a - b = a + (-b)$ oder $(a) : (-b) = -a : b$. Statt $a : b$ schreibt man auch $\frac{a}{b}$ oder a/b (dies ist dann ein Bruch, a heißt *Zähler*, b heißt *Nenner*). Es gelten die Rechenregeln für Brüche, z.B.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{1}{a/b} = \frac{b}{a}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \quad \frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}, \quad \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Alle diese Rechenregeln sollte man kennen. *Insbesondere sollte man keine eigenen Rechenregeln erfinden, wenn man beim Lösen einer Aufgabe gerade mal nicht weiter weiß.*

a) Was versteht man unter *Summanden*, *Faktoren*, *Summen* und *Produkten*? Was ist ein *Kehrwert*? Was versteht man unter *ausklammern*? Was meint man mit den Begriffen *erweitern* und *kürzen*?

b) Welche der folgenden Gleichungen stimmen? $a + (b + a) = 2a + b$, $a \cdot (b + c) = ab + c$, $a \cdot (b \cdot (c + b)) = abc + b^2$, $((a \cdot b) + a) \cdot c = a(b + 1)c$, $\frac{b}{c} : a = \frac{b}{ca}$, $\frac{a}{b} - 1 = \frac{a-1}{b}$.

c) Multiplizieren Sie folgende Terme aus: $2(-u + v(u + v)) + u(u - 2v)$, $(p + q)(p + q) - (p - q)(p - q)$, $(a - b)^3$, $(x + y)(x - y)$, $(1 + q + q^2 + \dots + q^n)(1 - q)$.

d) Schreiben Sie die folgenden Terme als einen Bruch: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy}$, $\frac{5 + \frac{1}{10} - \frac{3}{5}}{7 + \frac{1}{5}} + \frac{1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{4}}{4 - \frac{1}{2}}$, $\frac{a + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + b} + \frac{1}{a} - b$,

$$\frac{\frac{xy}{\frac{1}{4} + \frac{(x-y)^3}{x-y}}}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} + 14, \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}.$$

In den letzten beiden Teilaufgaben wurde das Wort *Term* benutzt. Darunter versteht man einen *Rechenausdruck*, bei dem zwei oder mehrere *Operanden* (Zahlen, Variable oder auch geklammerte Ausdrücke) durch einen oder mehrere Operatoren (+, -, ·, :) verknüpft sind. Die Reihenfolge der Operationen in einem Term wird durch die *Klammersetzung* festgelegt. Mit der schon erwähnten Regel *Punktrechnung vor Strichrechnung* lassen sich Klammern einsparen. Eine weitere Konvention zum Einsparen von Klammern haben Sie bei den letzten Aufgaben (hoffentlich) schon benutzt: Der *Exponent* in einem Ausdruck (sowas wie 3 in $(x - y)^3$) bezieht sich nur auf den unmittelbar unter ihm stehenden Operanden! *Die Operation „hoch“ wird vor jeder anderen Operation ausgeführt.*

e) Welche der Klammern sind mit diesen Konventionen in den folgenden Termen überflüssig? $2(x^2) - \frac{2(x+y)^2}{(2x)^2}$, $((2 + x)x^2)(x + y^2)$, $x^{(2+3)}(xy)^2$, $((x + y)(x - y^2) + 1)x^2$, $((2((x)^2 + 1)) + x)^2$.

Haben Sie bei den bisherigen Aufgaben wesentliche Fehler gemacht, sollten Sie die folgenden Aufgaben aufmerksam durcharbeiten. Vergewöhnen Sie sich dabei jeweils die geltenden Rechenregeln. *Wie multipliziere ich zwei Brüche? Wie dividiere ich zwei Brüche? Wann darf ich kürzen? Wie muss ich erweitern, um die Summe zweier Brüche als einen Bruch zu schreiben? Wann darf ich ausklammern?*

f) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$, $\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$, $\frac{-1}{3} : \frac{2}{-3}$, $\frac{1-\frac{1}{5}}{2+\frac{1}{3}}$, $-\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2-\frac{1}{3}}{3}}$.

g) Kürzen Sie soweit wie möglich: $\frac{49}{7}$, $\frac{49}{17}$, $\frac{15 \cdot 27}{6 \cdot 5}$, $\frac{5x+x^2}{(y+2)x}$, $\frac{25a+5a}{\frac{a^2}{5a}}$, $\frac{a^2-1}{a+1}$, $\frac{a^2+1}{a+1}$.

h) Klammern Sie soweit wie möglich aus: $x(x+y) - x$, $2x^2 + 6x + 4x^3$, $x + y - 2(x - \frac{y}{2})$.

i) Welche Gleichungen stimmen? $\frac{1}{x} + \frac{x}{y} = \frac{xy+1}{xy}$, $\frac{a}{b} : \frac{a+b}{a-b} = \frac{a^2-ab}{b^2+ab}$, $(-x)^3 = -x^3$.

2 Mathematische Symbole

Im Folgenden sehen Sie eine Liste einiger mathematischer Symbole und Schreibweisen, die Sie (größtenteils) schon im Mathematikunterricht der Schule kennengelernt haben.

+	plus	-	minus
·	mal	;, /	geteilt durch
a^n	a hoch n	$\sqrt{\quad}$	Wurzel
=	gleich	\neq	ungleich
>	größer	\geq	großer gleich
<	kleiner	\leq	kleiner gleich
$n!$	n Fakultät	$\binom{n}{k}$	n über k
$ a $	Betrag von a	$\sum_{k=1}^n$	Summe von $k = 1$ bis n
%	Prozent	$a \in A$	a Element A
{ }	Mengenklammern	$a \notin A$	a nicht Element A
$A \subset B$	A Teilmenge von B	$A \supset B$	A Obermenge von B
$A \cap B$	A geschnitten mit B	$A \cup B$	A vereinigt mit B
$A \setminus B$	A ohne B	\emptyset	leere Menge
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall von a bis b	$]a, b[$, (a, b)	offenes Intervall von a bis b
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen	\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen	\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
π	Pi	e	e , Eulersche Zahl
\log_b	Logarithmus zur Basis b	\ln	natürlicher Logarithmus
∞	unendlich	$\lim_{n \rightarrow \infty}$	Grenzwert bei n gegen ∞

a) Welche dieser Symbole und Schreibweisen kennen Sie nicht?

b) Was ist $\sqrt{2}$?

c) Berechnen Sie a^3 für $a = -\frac{1}{2}$, $a = -1$ und $a = 5$.

d) Stimmt das? Wenn $a \leq b$, dann ist $-a \geq -b$.

e) Stimmt das? Wenn $a > b$, dann ist $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

f) Was meint $\sum_{k=1}^n a_k$? Erkennen Sie die Bedeutung der Formel $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$?

g) Was bedeutet $\{0, 1\}$, $\{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$ und $[2, 5[$ bzw. $[2, 5)$?

h) Was ist $5!$ bzw. $\frac{10!}{8!}$?

i) Kennen Sie die Definition des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$?

j) Kennen Sie π und e bis zu den ersten zwei Nachkommastellen?

k) Wissen Sie was $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ bedeutet?

3 Gleichungen

Gleichungen treten in vielen Bereichen der Mathematik auf. Das Wichtigste an einer Gleichung wie $1 + x = \frac{1}{1+x}$ ist das Gleichheitszeichen zwischen den beiden Seiten der Gleichung. Alle Gleichungen sind von dieser Form: *Sie bestehen aus einer linken Seite und einer rechten Seite und zwischen beiden Seiten steht „=“*. Enthält die Gleichung wie hier eine unbekannte Größe x , so kann man fragen, für welche Zahlen x die Gleichung überhaupt Sinn macht (oder was der *Definitionsbereich* der Gleichung ist; bei diesem Beispiel ist dies $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, da für $x = -1$ auf der rechten Seite der Gleichung 0 im Nenner stehen würde) und welche x die Gleichung lösen, d.h. für welche x ist die linke Seite der Gleichung *gleich* der rechten Seite der Gleichung? Die Lösungen x bilden die *Lösungsmenge* der Gleichung. In unserem Beispiel lösen $x = 0$ und $x = -2$ die Gleichung. Es gibt Gleichungen, die keine Lösung besitzen (z.B. besitzt $x^2 + 1 = 0$ keine Lösung in den reellen Zahlen, da die linke Seite der Gleichung immer positiv ist) und auch solche, die für alle x aus dem Definitionsbereich erfüllt sind (z.B. ist $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt). Gleichungen können mehr als eine Unbekannte enthalten. Z.B. ist die Gleichung

$$xy = 0$$

genau dann erfüllt, wenn $x = 0$ ist oder wenn $y = 0$ ist. (Das sollte man sich merken).

Wie löst man eine Gleichung? Beispiel: $1 + x = \frac{1}{1+x}$. Für $x \neq -1$ können wir beide Seiten der Gleichung mit $1 + x$ multiplizieren. Dies führt auf die Gleichung $(1 + x)^2 = 1$. Multipliziert man rechts aus und subtrahiert auf beiden Seiten 1 ergibt sich die Gleichung $x^2 + 2x = 0$. Hier kann man auf der linken Seite x ausklammern und erhält $x(x + 2) = 0$. Dieses Produkt aus zwei Faktoren kann nur dann verschwinden, wenn einer der Faktoren = 0 ist, d.h. wenn $x = 0$ oder $x = -2$ ist.

Die allgemeine Vorgehensweise ist also so: Man ändert beide Seiten der Gleichung simultan ab (damit das Gleichheitszeichen erhalten bleibt), und zwar so, dass sich eine letztlich Gleichung ergibt, deren Lösung man kennt und die im besten Fall dieselben Lösungen besitzt wie die ursprüngliche Gleichung. Hierbei kann man auf beiden Seiten der Gleichung *Terme* addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren. Dabei muss man immer darauf achten, dass man nicht mit 0 multipliziert oder dividiert. (Wissen Sie wieso?) Es sind auch weitere Abänderungen der Gleichung erlaubt, wobei man immer darauf achten muss, dass die neu entstehende Gleichung dieselben Lösungen wie die ursprüngliche Gleichung besitzt. Hier muss man z.B. beim Quadrieren beider Seiten einer Gleichung aufpassen.

- a) Geben Sie die Lösungen x der folgenden Gleichungen an (wenn diese existieren): $x + 7 = 2x - 3$, $x + \frac{1}{x} = 2$, $\frac{x-1}{x^2-1} = 0$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{x^2}$, $x^3 = 2x$, $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = 1$.
- b) Lösen Sie die Gleichung $P = \frac{p}{100}G$ nach p bzw. nach G auf.
- c) Lösen Sie die Gleichung $ab = cd$ jeweils nach a , b , c und d auf.
- d) Was ist hier falsch? Es ist

$$2kg = 2\,000g$$

$$3kg = 3\,000g.$$

Die Multiplikation der linken und rechten Seiten dieser beiden Gleichungen ergibt

$$6kg = 2 \cdot 3kg = 2\,000 \cdot 3\,000g = 6\,000\,000g,$$

dividiert man beide Gleichungen, so ist

$$\frac{2}{3}kg = 2 : 3kg = 2\,000 : 3\,000g = \frac{2}{3}g.$$

- e) Eine Gerade G in der Ebene lässt sich beschreiben als die Menge alle Punkte (x, y) , die eine Gleichung der Form $y = mx + b$ erfüllen. Dabei heißt m die Steigung und b der Achsenabschnitt der Geraden G .

Bestimmen Sie den Schnittpunkt (x_0, y_0) der durch $y = 2x - 3$ und $y = 5x + 9$ beschriebenen Geraden.
f) Was stimmt hier nicht? Zu lösen ist die Gleichung

$$\sqrt{x-4} - \frac{3}{\sqrt{x-4}} - \sqrt{x-1} = 0$$

Lösung:

$$\begin{aligned} x - 4 - 3 - \sqrt{(x-1)(x-4)} &= 0 && \text{(Multiplikation mit } \sqrt{x-4} \text{)} \\ x - 7 &= \sqrt{(x-1)(x-4)} && \text{(Addition von } \sqrt{(x-1)(x-4)} \text{)} \\ x^2 - 14x + 49 &= x^2 - 5x + 4 && \text{(beide Seiten quadriert)} \\ 45 &= 9x \end{aligned}$$

Also ist $x = 5$. Die Probe zeigt aber $\sqrt{5-4} - \frac{3}{\sqrt{5-4}} - \sqrt{5-1} = 1 - 3 - 2 = -4 \neq 0$.

g) Kennen Sie die Lösungen x der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ (p, q beliebig)?

h) Kennen Sie die Lösung x der Gleichung $2^x = y$ ($y > 0$ beliebig)?

4 Prozentrechnung

Bruchteile P einer gegebenen Größe G (man sagt auch eines Grundwertes G) lassen sich am besten miteinander vergleichen, wenn man sie durch Brüche mit dem gleichen Nenner angibt. Im Alltag wird dabei meistens der Nenner 100 verwendet und Bruchteile in Hunderstel bzw. *Prozent* angegeben. Statt $\frac{1}{4}$ von G kann man auch $\frac{25}{100}$ von G oder 25% von G sagen. Man schreibt

$$\frac{1}{100} = 1\% \quad \text{bzw.} \quad \frac{p}{100} = p\%.$$

Der gegebene Bruchteil P heißt der *Prozentwert* der Größe G , p heißt der *Prozentsatz*. Die Beziehung zwischen p , P und G ist gegeben durch die Gleichung

$$P = \frac{p}{100} G.$$

Sind zwei dieser drei Größen bekannt, lässt sich mit dieser Gleichung die dritte Größe berechnen. Das Ganze heißt *Prozentrechnung*. Bei konkreten Aufgaben muss man sich meist nur Gedanken darüber machen, welche zwei Größen gegeben sind und welche zu bestimmen ist.

a) Lösen Sie die Gleichung $P = \frac{p}{100} G$ nach G , p und nach $p\% = \frac{p}{100}$ auf.

b) Wieviel sind 16% von 50?

c) Auf ein Guthaben von 8000 DM zahlt Ihnen ihre Bank in einem Jahr Zinsen in Höhe von 480 DM? Wieviel Prozent Zinsen erhalten Sie?

d) Ihre Miete wurde um 7% erhöht und beträgt nun 557,47 DM. Wie hoch war die Miete vor der Mieterhöhung?

e) Der Personalchef einer Firma bemerkt, dass 40% und damit fast die Hälfte aller Krankmeldungen einen Freitag oder einen Montag betreffen, ganz offenbar zur Verlängerung des Wochenendes. Würden Sie ihm vorschlagen, diesen Zustand zu ändern?

5 Dreisatz

In vielen alltäglichen Situation ist der Quotient $x : y = \frac{x}{y}$ oder das Produkt $x \cdot y$ zweier Größen x und y konstant. Im ersten Fall

$$\frac{x}{y} = C \quad \text{bzw.} \quad x = C \cdot y$$

sagt man, dass die Größen x und y *proportional zueinander* sind, im zweiten Fall

$$x \cdot y = C \quad \text{bzw.} \quad x = C \cdot \frac{1}{y}$$

heißen x und y *umgekehrt proportional zueinander*. Diesen beiden Gleichungen sieht man Folgendes an: Sind x und y proportional zueinander, so muss bei Zunahme von x auch y zunehmen. Bei umgekehrt proportionalen Größen muss bei Zunahme von x die Größe y abnehmen. Bei konkreten Aufgaben hilft diese Überlegung, um zu erkennen, ob zwei Größen in einer proportionalen oder einer umgekehrt proportionalen Beziehung zueinander stehen. Natürlich kann es sein, dass zwei gegebene Größen in keiner proportionalen Beziehung zueinander stehen.

a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Größen proportional, umgekehrt proportional oder nicht proportional zueinander sind:

x	y
Preis in DM	Preis in Euro
Leistung in kW	Leistung in PS
Fläche eines Kreises	Radius
Volumen eines Gases	Druck eines Gases

b) Auf einer Deutschlandkarte im Maßstab 1 : 1 000 000 müssten von den 80 Millionen Einwohnern doch wenigstens $\frac{80\,000\,000}{1\,000\,000} = 80$ Menschen Platz finden. Wieso klappt das nicht?

Bei der *Dreisatzrechnung* (man sagt auch *Proportionsrechnung*) sind die Konstante C und eine der Größen x oder y bekannt und gesucht ist die zweite Größe. Bei einer konkreten Aufgabe muss man sich zunächst darüber klar werden, in welchem Proportionalitätsverhältnis die angegebenen Größen stehen (wenn überhaupt!) und anschließend die gesuchte Größe berechnen.

Beispiel: 2 Maler benötigen 7 Stunden, um eine Wand zu streichen. In wie vielen Stunden können 4 Maler die gleiche Arbeit schaffen? x : Zeit. y : Anzahl der Maler. Je größer x ist, desto kleiner ist y . Damit stehen die Anzahl der Maler und die benötigte Zeit in einem umgekehrt proportionalen Verhältnis zueinander mit $x \cdot y = 2 \cdot 7$ Stunden = 14 Stunden. Vier Maler ($y = 4$) brauchen also $x = \frac{14}{4}$ Stunden = 3,5 Stunden.

In der Schule haben Sie solche Dreisatzaufgaben vielleicht auch mit dem folgenden „Rezept“ gelöst:

Behauptungssatz: 2 Maler benötigen 7 Stunden
 Zwischensatz: 1 Maler benötigt 7 Stunden $\cdot 2 = 14$ Stunden
 Schlusssatz: 4 Maler benötigen 14 Stunden $: 4 = 3,5$ Stunden

Lösen Sie nun die folgenden Aufgaben. Machen Sie sich dabei jeweils zunächst die Proportionalitätsverhältnisse klar. Aber Vorsicht! Nicht alles was wie eine Dreisatzaufgabe aussieht, ist es auch!

c) 1 Euro sind 1,95583 DM. Wieviel Euro sind 1 DM?

d) 4 kg einer Ware kosten 32 DM. Wieviel DM kosten 6 kg? Was macht das in Euro?

e) Wegen vieler Staus erreichen Sie auf der Fahrt von Nürnberg nach Frankfurt nur eine Durchschnittsgeschwindigkeit von $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wie schnell müssen Sie auf der Rückfahrt sein, um noch eine Gesamtdurchschnittsgeschwindigkeit von $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ zu erreichen?

f) Nach dem *Gesetz von Boyle* ist das Produkt aus Druck p und Volumen V eines (idealen) Gases bei einer festen Temperatur konstant. Wie verändert sich der Druck p , wenn das Volumen V des Gases verdoppelt wird?

g) Der Teppichbodenbelag für ein Zimmer kostet 816 DM. Wie groß ist das Zimmer, wenn der Quadratmeterpreis 25,50 DM beträgt.

h) Eine (amerikanische) Gallone entspricht 3,785 Liter, ein (englisches) Pint 0,5688 Liter. Wieviel Pint sind eine Gallone?

i) Um das Wievielfache müssen Sie den Radius eines Kreises vergrößern, um seine Fläche zu verdoppeln?

in der $(n + 1)$ -ten Zeile an der $(k + 1)$ -ten Stelle auftreten. Sie wissen vielleicht noch, dass die Zahlen am Anfang und am Ende einer Zeile im Pascalschen Dreieck immer 1 sind und sich die anderen Zahlen dadurch ergeben, dass man die Summe der beiden Zahlen über dieser Zahl bildet. So ergibt sich der Eintrag 6 in der 5-Zeile durch Addition der darüberstehenden Zahlen 3 und 3. Da die Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck auftauchen, kann man dieses heranziehen, um den Ausdruck $(x + y)^n$ zu berechnen.

e) Berechnen Sie $(x + y)^5$ und $(x - y)^6$.

f) Berechnen Sie $(y - a)^3$ und $(2 + b)^4$.

7 Quadratische Gleichungen

Bei *quadratischen Gleichungen* (man sagt auch *Gleichungen zweiten Grades*) handelt es sich um Gleichungen der Form

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

wo $a \neq 0$, b und c reelle Zahlen sind. Gesucht sind reelle Lösungen x dieser Gleichung. Man nennt ax^2 das *quadratische Glied*, bx das *lineare Glied* und c das *absolute Glied* der quadratischen Gleichung.

Für spezielle quadratische Gleichungen können wir sofort Lösungen angeben. Ist das absolute Glied $c = 0$, so haben wir eine Gleichung der Form

$$ax^2 + bx = 0.$$

Hier können wir auf der linken Seite x ausklammern. Damit erhalten wir die Gleichung

$$x(ax + b) = 0,$$

bei der auf der linken Seite zwei Faktoren stehen. Deren Produkt kann nur dann $= 0$ sein, wenn mindestens einer der Faktoren verschwindet, also wenn $x = 0$ oder wenn $ax + b = 0$ ist. Bei der zweiten Gleichung können wir auf beiden Seiten b subtrahieren und anschließend durch a dividieren (beachten Sie, dass bei quadratischen Gleichungen *immer* $a \neq 0$ vorausgesetzt wird, also stets das quadratische Glied vorkommt). Damit erhalten wir die Lösungen $x = 0$ oder $x = -\frac{b}{a}$ (was im Fall $b = 0$ auch die Lösung $x = 0$ gibt). In einem anderen Spezialfall können wir auch sofort Lösungen angeben, nämlich dann wenn kein lineares Glied vorhanden und die Gleichung von der Form

$$ax^2 + c = 0$$

ist (solche Gleichungen heißen *reinquadratisch*). Auf beiden Seiten können wir c subtrahieren und anschließend durch a dividieren. Dann ergibt sich die Gleichung

$$x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht das Quadrat einer reellen Zahl und dieses ist immer *nicht negativ*. Sollte die linke Seite $-\frac{c}{a}$ negativ sein, so kann diese Gleichung keine reelle Lösung besitzen. Dies ist z.B. bei der quadratischen Gleichung $x^2 + 1 = 0$ der Fall. Ist die linke Seite der Gleichung $= 0$ (was nur bei $c = 0$ der Fall ist), so haben wir die Gleichung $x^2 = 0$ zu lösen mit der offensichtlichen Lösung $x = 0$. Bei einer positiven linken Seite ergeben sich zwei Lösungen der quadratischen Gleichung, nämlich $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ und $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$. In diesen beiden Fällen haben wir gesehen, dass in Abhängigkeit von den Konstanten a , b und c eine quadratische Gleichung zwei Lösungen, eine Lösung oder keine Lösung besitzt.

a) Geben Sie (im Existenzfall) die reellen Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen an:

$$4x^2 - 1 = 0, \quad -12y^2 = 0, \quad -16z^2 + 64 = 0, \quad -16a^2 + 64a = 0, \quad 2b^2 + 3b = 0, \quad 100c^2 + 10 = 0.$$

Wie löst man nun allgemeine eine quadratische Gleichung? Hier bedient man sich eines *Tricks*, den Sie aus der Schule kennen und der *quadratische Ergänzung* genannt wird. Zunächst können wir die quadratische Gleichung durch a dividieren, um die Gleichung auf die Form

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

zu bringen. In unserem zweiten Spezialfall haben wir die Gleichung lösen können, nachdem wir auf der linken Seite einen quadratischen Ausdruck erzeugt haben. Dies gelingt auch hier. Dazu betrachten wir die binomische Formel

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

bei der auf der linken Seite die ersten beiden Summanden mit den ersten beiden Summanden unserer quadratischen Gleichung übereinstimmen und bei der im dritten Summanden kein x auftaucht. Nun kommt der Trick, bei dem wir in geschickter Weise eine 0 addieren. Wir formen unsere quadratische Gleichung in der folgenden Weise um

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \underbrace{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{=0} + \frac{c}{a} &= 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

Wie bei einer reinquadratischen Gleichung steht auf der linken Seite etwas Nicht-Negatives. Das Vorzeichen der rechten Seite und damit die Entscheidung darüber, ob und wieviele Lösungen existieren hängt nur vom Zähler $b^2 - 4ac$ ab, der sogenannten *Diskriminante*

$$D = b^2 - 4ac$$

der quadratischen Gleichung. Nun können wir wie oben argumentieren und Folgendes feststellen: Eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ und reellen Koeffizienten a, b und c hat

genau zwei reelle Lösungen, wenn die Diskriminante $D = b^2 - 4ac > 0$ ist,
 genau eine reelle Lösung, wenn die Diskriminante $D = b^2 - 4ac = 0$ ist,
 keine reelle Lösung, wenn die Diskriminante $D = b^2 - 4ac < 0$ ist.

In den ersten beiden Fällen können wir durch Auflösen der Gleichung $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ die Lösungen explizit angeben:

zwei reelle Lösungen bei $b^2 - 4ac > 0$: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ und $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,
 eine reelle Lösung bei $b^2 - 4ac = 0$: $x_1 = -\frac{b}{2a}$.

Hier braucht man sich aber nur den Fall zweier Lösungen zu merken, da der Fall einer Lösung der Spezialfall mit $b^2 - 4ac = 0$ ist.

b) Aus der Schule kennen Sie vielleicht noch die „ p - q -Formel“: Die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

besitzt im Fall $p^2 - 4q \geq 0$ die Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Wie hängt diese Formel mit der obigen Lösungsformel zusammen?

c) Benutzen Sie die „ p - q -Formel“, um das Folgende zu zeigen: Hat die quadratische Gleichung $x^2 + px + q$ die beiden Lösungen x_1 und x_2 , so ist $x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$. (Dies sind die *Formeln von Vieta*.) Das bedeutet: $x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = (x - x_1)(x - x_2)$.

d) Berechnen Sie die Diskriminante der folgenden quadratischen Gleichungen und entscheiden Sie, ob zwei, eine oder keine reelle Lösung existiert: $2x^2 - 3x + 4 = 0$, $-10x^2 + 9x - 3 = 0$, $x^2 - 8x + 16 = 0$, $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{6} = 0$.

e) Geben Sie die Lösungen a der quadratischen Gleichungen $xa^2 - ya + z$ in Abhängigkeit von x , y und z an.

f) Finden Sie die Lösungen b der Gleichung $b^2 + xb - x^2$ und der Gleichung $x^2 + bx + c = 0$.

Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen können Sie entscheiden, ob und welche reellen Lösungen eine quadratische Gleichung besitzt. Damit lassen sich aber auch Lösungen für andere Arten von Gleichungen finden, sofern man diese auf quadratische Gleichungen zurückführen kann. Dies ist z.B. bei speziellen *Gleichungen dritten und vierten Grades* der Fall. Die Gleichung dritten Grades

$$y^3 + 4y^2 - 5y = 0,$$

bei der kein konstantes Glied vorhanden ist, besitzt die Lösungen $y = -5$, $y = 0$ und $y = 1$. Dies erkennt man durch Ausklammern von y auf der linken Seite, wodurch sich die Gleichung $y(y^2 + 4y - 5) = 0$ ergibt. Also ist $y = 0$ oder y ist eine Lösung der quadratischen Gleichung $y^2 + 4y - 5 = 0$. Gibt es in einer Gleichung vierten Grades

$$x^4 + px^2 + q = 0$$

keine Glieder mit ungeraden Exponenten, so kann man diese Gleichung als eine quadratische Gleichung für $u = x^2$ auffassen, also

$$u^2 + pu + q = 0.$$

Im Fall einer nicht negativen Diskriminante lassen sich die Lösungen u dieser Gleichung mit der Lösungsformel bestimmen. Durch anschließendes Wurzelziehen (aus den nicht negativen(!) Lösungen u) erhält man dann Lösungen x . Beide Verfahren lassen sich auch anwenden, wenn es gelingt, eine Gleichung auf die Form $y^3 + py^2 + qy = 0$ bzw. $y^4 + py^2 + q = 0$ zurückzuführen.

g) Geben Sie die Lösungen x der folgenden Gleichungen an: $x^4 - 16 = 0$, $x^4 - 19x^2 + 100 = 0$, $x^3 - 25x = 0$, $2x^3 + 6x^2 + 5x = 0$.

h) Bestimmen Sie die Lösungen a der Gleichungen $(a^2 - 24)^2 - 2a^2 + 49 = 0$ und $(a^2 - 14)^2 = 5(6a^2 - 49)$ (hier hilft jeweils ein kleiner Trick).

Einige Arten von Bruchgleichungen lassen sich ebenfalls auf quadratische Gleichungen zurückführen.

i) Bestimmen Sie die Lösungen x der Gleichungen $\frac{x+3}{x} + \frac{x}{x-2} = 5$ und $\frac{x+1}{x-1} = -\frac{x-2}{x+1}$.

j) Geben Sie die Lösungen y folgender Gleichungen an: $\frac{y}{2y-3} - \frac{1}{2y} = \frac{3}{4y-6}$ und

k) $\frac{2y}{y-4} + \frac{3y}{y+4} = \frac{4(y^2 - y + 4)}{y^2 - 16}$.

Eine wichtige Klasse von Gleichungen, die sich manchmal auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen, sind *Wurzelgleichungen*.

8 Wurzelgleichungen

Gleichungen wie

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{x-1} = 0,$$

bei welchen die Variable unter dem Wurzelzeichen vorkommt, nennt man *Wurzelgleichungen*. Bei solchen Gleichungen muss man zunächst die Frage nach dem Definitionsbereich stellen, da die unter den Wurzeln auftretenden Terme nicht negativ sein dürfen. Anschließend wird die Gleichung umgeformt, wobei ein wichtiges Hilfsmittel das Quadrieren der Gleichung ist. Aber Vorsicht! Die quadrierte Gleichung kann mehr Lösungen als die ursprüngliche Gleichung besitzen. So entsteht die Gleichung $x^2 = 1$ mit den Lösungen $x = 1$ und $x = -1$ durch Quadrieren aus der Gleichung $x = 1$ mit nur einer Lösung. Merken Sie sich: *Wird beim Umformen einer Gleichung quadriert, so sind die Lösungen der neuen Gleichungen nur Kandidaten für die Lösungen der ursprünglichen Gleichungen, d.h. die Lösungen der ursprünglichen Gleichung befinden sich unter den Lösungen der quadrierten Gleichung. Aber nicht alle Kandidaten müssen Lösungen der ursprünglichen Gleichung sein.* Die Lösungen findet man durch eine *Probe*: Man prüft direkt nach, welche der Kandidaten die ursprüngliche Gleichung lösen.

Im obigen Beispiel ist der Definitionsbereich der Gleichung $\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\} = [1, 2]$, da der erste Ausdruck $\sqrt{2-x}$ für $2-x \geq 0$, also $x \leq 2$ und der zweite Ausdruck $\sqrt{x-1}$ für $x-1 \geq 0$, also für $x \geq 1$ definiert ist. Beginnen wir mit den Umformungen: Wir bringen den zweiten Term der Gleichung auf die rechte Seite und quadrieren die entstehende Gleichung anschließend. Dies ergibt

$$2-x = x-1,$$

mit der Lösung $x = \frac{3}{2}$. Dies ist unser Kandidat. Die Probe

$$\sqrt{2-\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}-1} = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \neq 0$$

zeigt, dass der Kandidat die ursprüngliche Wurzelgleichung *nicht* löst. Also besitzt die Gleichung keine Lösungen. (Dies hätte man bei genauerem Hinschauen auch direkt an der Gleichung sehen können. Die linke Seite der Gleichung ist die Summe zweier Wurzeln und damit die Summe zweier nicht negativer Ausdrücke. Diese Summe kann nur dann 0 ergeben, wenn *jeder* Summand = 0 ist. Beim ersten Summanden ist dies aber für $x = 2$, beim zweiten Summanden für $x = 1$ der Fall.)

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Lösungen der folgenden Gleichungen: $\sqrt{3-x} = \sqrt{x-1}$, $\sqrt{4-x} = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$, $(x-1)\sqrt{5-x} + \sqrt{x-1} = 0$.

b) Bestimmen Sie die Lösungen x von $6 - \sqrt{1-4x} = \frac{1}{6}x$, $\sqrt{13-4x} = 2-x$ und $\sqrt{13-4x} = 4-x$.

c) Lösen Sie die Gleichungen $\sqrt{x-5} = 5 - \sqrt{x}$ und $\frac{\sqrt{x-3}}{9} - \frac{\sqrt{x+6}}{9} = 1$.

9 Potenzen und allgemeine Wurzeln

Das m -fache Produkt einer reellen Zahl a mit sich selbst heißt die m -te *Potenz* von a und wird mit

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m\text{-mal}}$$

abgekürzt. Hierbei ist m zunächst eine natürliche Zahl. Für ganze Zahlen m erklärt man den Ausdruck a^m wie folgt: Der Kehrwert $\frac{1}{a}$ einer Zahl $a \neq 0$ wird mit a^{-1} abgekürzt. Für negative m setzt man dann $a^m = \frac{1}{a^{-m}} = \frac{1}{a \cdot \dots \cdot a}$. Für ganzzahlige Exponenten m und n ergeben sich unmittelbar die folgenden *Potenzgesetze*:

$$1^n = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{m+n} = a^m a^n, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^m = a^m b^m.$$

Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist nämlich beispielsweise

$$a^m a^n = (\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m\text{-mal}}) (\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}) = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{(m+n)\text{-mal}} = a^{m+n}.$$

Für jede nicht-negative Zahl a und jede natürliche Zahl n existiert genau eine reelle Lösung $a \geq 0$ der Gleichung $a^n = x$. Diese Lösung x heißt die n -te Wurzel von a und wird mit

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

bezeichnet (im Fall $n = 2$ spricht man auch von der (Quadrat-)Wurzel und schreibt einfach $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$). Für $a > 0$ und $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$) wird die positive Zahl a^q definiert durch

$$a^q = a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Hat man a^q für alle rationalen Zahlen q erklärt, so kann jeder Mathematikstudent und jede Mathematikstudentin im ersten Semester beweisen, dass es zu $a > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ eine eindeutig bestimmte positive Zahl a^r gibt. Diese Zahl a^r heißt *Potenz zur Basis $a > 0$ mit Exponent $r \in \mathbb{R}$* . Für $a = 0$ und $r > 0$ setzt man noch $a^r = 0$ (Beachten Sie: 0^0 und 0^r mit $r < 0$ sind nicht definiert!) Die für ganze Exponenten gültigen Potenzgesetze übertragen sich ohne weiteres auf allgemeine Potenzen. Es gilt also

$$1^r = 1, \quad a^1 = a, \quad a^{r+s} = a^r a^s, \quad (a^r)^s = a^{rs}, \quad (ab)^r = a^r b^r$$

für $a, b > 0$ und $r, s \in \mathbb{R}$. Diese Gesetze sollten Sie kennen. Ein Spezialfall dieser Gesetze sind die *Wurzelgesetze*

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad \sqrt[n]{a} \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}, \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}}$$

für $a, b > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$. Hier sehen vielleicht insbesondere die letzten beiden Gesetze etwas seltsam aus. Wenn man die Potenzgesetze kennt, kann man dies aber sofort nachrechnen:

$$\sqrt[m]{a} \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}} a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = a^{\frac{m+n}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}.$$

- a)** Berechnen Sie 2^3 , $(2^2)^3$, 2^{2^3} und 3^3 .
b) Berechnen Sie $\sqrt{49}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{125}$, und $\sqrt[4]{81}$.
c) Zeigen Sie: $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}}$.
d) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich:

$$\sqrt{8} + \sqrt{2}, \quad \sqrt{12} - \sqrt{3}, \quad (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}), \quad \sqrt{a^2} \text{ mit } a \in \mathbb{R}.$$

- e)** Berechnen Sie 2^x und $2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ für $x = -2, -1, 0, 1, 2$.
f) Drücken Sie die folgenden Terme durch eine einzige Wurzel aus:

$$\sqrt{2\sqrt{3}}, \quad \sqrt[3]{\frac{5}{\sqrt{5}}}, \quad \sqrt{a\sqrt[3]{a}}, \quad \sqrt[5]{a^r \sqrt[3]{a^s} \sqrt{a^t}}.$$

- g)** Bringen Sie die folgenden Terme auf die Form a^x .

$$a^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[4]{a^{-2}} \cdot \sqrt[3]{a^4}, \quad \frac{a^3 \sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[4]{a}}, \quad \sqrt[m]{a^r} \sqrt[n]{a^s}.$$

h) Aus dem Mathematikunterricht wissen Sie vielleicht noch, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist (was Sie vielleicht weniger irritiert hat als die antiken Mathematiker, denen dies erstmals aufgefallen ist). Kennen Sie noch den Beweis?

An dieser Stelle können wir noch kurz darauf eingehen, wieso wir im Abschnitt über die quadratischen Gleichungen immer von den reellen Lösungen gesprochen haben. Aus h) ist ersichtlich, dass die Gleichung $x^2 = 2$ in den rationalen Zahlen keine Lösung besitzt, wohl aber in den reellen Zahlen, die eine echte Obermenge der rationalen Zahlen bilden (jede rationale Zahl ist auch eine reelle Zahl, aber nicht jede reelle Zahl, wie z.B. $\sqrt{2}$, ist eine rationale Zahl). Wir haben gesehen: Die Gleichung $x^2 = -1$ besitzt keine Lösung in den reellen Zahlen. Wie man aber bei der Gleichung $x^2 = 2$ sieht, kann durch Erweiterung der Grundmenge (hier von \mathbb{Q} auf \mathbb{R}) eine Lösung gefunden werden. Geht dies auch bei der Gleichung $x^2 = -1$? Die Antwort ist „ja“. Der Zahlbereich, indem die Gleichung $x^2 = -1$ eine Lösung besitzt ist die Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen. Sie besteht aus allen Zahlen der Form $a + bi$, wo i , die *imaginäre Einheit*, die Wurzel aus -1 ist, d.h. eine „Zahl“ i mit $i^2 = -1$ und a und b reelle Zahlen sind. Beispielsweise ist $2 + 3i$ eine komplexe Zahl. Reelle Zahlen a sind spezielle komplexe Zahlen der Form $a + 0i$. Wie man bei den reellen Zahlen von der Zahlengeraden spricht, spricht man bei den komplexen Zahlen von der Zahlenebene. So kann man sich jeden Punkt der x - y -Ebene als eine komplexe Zahl vorstellen. Der reellen Zahl 1 entspricht der Punkt $(1, 0)$, der imaginären Zahl i entspricht der Punkt $(0, 1)$. Für komplexe Zahlen gelten alle Rechenregeln, die auch für reelle Zahlen gelten.

i) Lösen sie die Gleichung $x^2 = -1$ in der Menge der komplexen Zahlen.

10 Logarithmen

Zu $b > 0$ mit $b \neq 1$ besitzt die Gleichung $b^x = y$ für positive y eine eindeutige Lösung x . Diese Lösung heißt der *Logarithmus von y zur Basis b* und wird mit $\log_b y = x$ notiert. Spezielle Werte des Logarithmus sind

$$\log_b 1 = 0, \quad \log_b b = 1, \quad \log_b \frac{1}{b} = -1.$$

Aus den Potenzgesetzen leiten sich für $x, y > 0$ und alle $s \in \mathbb{R}$ die *Logarithmengesetze* ab:

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y, \quad \log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y, \quad s \log_b y = \log_b y^s.$$

Beispielsweise ist

$$b^{\log_b x + \log_b y} = b^{\log_b x} b^{\log_b y} = xy.$$

Also muss $\log_b x + \log_b y = \log_b xy$ sein, da $b^{\log_b xy} = xy$ ist.

a) Berechnen Sie $\log_2 4$, $\log_2 8$, $\log_{10} 1000$, $\log_4 4$ und $\log_4 8$.

b) Berechnen Sie $\log_{10} 5 + \log_{10} 2$, $\log_2 14 - \log_2 28$, $\log_3 27 - \log_2 4$.

c) Fassen Sie die folgenden Ausdrücke zu einem Logarithmus zusammen: $\log_b 2 + \log_b 3$, $\log_b 5 - \log_b 10$, $\log_b 2 - \log_b 4 + \log_b 6$, $\log_b \sqrt{2} - \frac{1}{2} \log_b 2$, $2 \log_b x + 3 \log_b y$.

d) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke zu einem Logarithmus: $\log_b x^3 + \log_b x^2$, $\log_b 2x^2 - \log_b 4x$, $\log_b (\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x})^2$, $\log_b(x - y) + \log_b(x + y)$.

Logarithmen zu verschiedenen Basen lassen sich einfach ineinander umrechnen. Es gelten die Umrechnungsformeln

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad \text{und} \quad \frac{\log_b x}{\log_b y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}.$$

Am besten merkt man sich dies mit der Regel: *Der Quotient zweier Logarithmen ist unabhängig von der Basis.*

e) Die Formel $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ ist ein Spezialfall der der Formel $\frac{\log_b x}{\log_b y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$. Aber welcher?

f) Stimmt die Formel $\log_b x = -\log_{\frac{1}{b}} x$?

g) Berechnen Sie $\frac{\log_4 8}{\log_4 4}$ sowie $\frac{\log_2 8}{\log_2 4}$.

h) Der Ausschlag der Nadel eines Seismographen ist ein Maß für die tatsächliche Bewegung des Untergrundes am Beobachtungsort eines Erdbebens und damit ein Maß der von einem Erdbeben freigesetzten Energie, welche mittels der „Richter–Skala“ gemessen wird. Diese Skala ist logarithmisch aufgebaut. Die *Magnitude* M (die Stärke) auf der Richterskala entspricht grob gesprochen dem Logarithmus der freigesetzten Energie E , also

$$M = \log_b C \cdot E$$

(hier ist C eine Konstante). Erhöht sich die Magnitude M auf dieser Skala um den Wert 1, so erhöht sich die zugeordnete Energie um das 30–fache. Geben Sie die Basis b dieser logarithmischen Skala an. Um wieviel erhöht sich die Energie, wenn sich die Magnitude auf der Skala um 0,5 erhöht?

In der Praxis sind einige Basen b von besonderer Bedeutung und die entsprechenden Logarithmen haben eigene Namen. Auf üblichen wissenschaftlichen Taschenrechnern findet man den dekadischen und den natürlichen Logarithmus. (Über die Umrechnungsformel kann man mit jedem von diesen auch Logarithmen zu beliebigen Basen berechnen.)

b	\log_b	
2	ld	dualer Logarithmus
10	lg	dekadischer Logarithmus
e	ln	natürlicher Logarithmus

$e = 2,71828182\dots$ ist hier die *Eulersche Zahl*, die in der Mathematik eine besondere Bedeutung hat (was sich erst in der höheren Analysis herausstellt). Neben π ist diese Zahl die wichtigste mathematische Konstante und wie π ist e keine rationale Zahl (d.h. die Zahlenreihe $2,71828182\dots$ setzt sich fort ohne jemals periodisch zu werden oder abzubrechen). So gilt z.B. (das müssen Sie sich nicht merken) mit der imaginären Zahl i die bemerkenswerte Formel $e^{i\pi} + 1 = 0$, die in jeder Sammlung der „schönsten“ mathematischen Formeln auftaucht.

Zum Schluss dieses Abschnittes behandeln wir noch *logarithmische Gleichungen*. Der übliche Rechenrick bei diesen Gleichung ist die Verwendung der Werte $\log_b 1 = 0$, $\log_b b = 1$, $\log_b \frac{1}{b} = -1$, die Benutzung der Identität $b = \log_a a^b = a^{\log_a b}$ sowie die Beobachtung, dass $\log_b x = \log_b y$ nur für $x = y$ gelten kann. *Bei logarithmischen Gleichungen sollte man immer die Probe machen, ob die errechneten Lösungen (sofern man sie gefunden hat) auch im Definitionsbereich liegen.* Beachten Sie nochmals: *Logarithmen kann man nur von positiven Zahlen bilden.* Bei $\log_b x$ muss $x > 0$ sein und b eine positive Zahl verschieden von 1.

i) Lösen Sie die Gleichung $\lg x + \lg(x - 2) = \lg 3$.

j) Lösen Sie die Gleichung $x^{\ln x} = 3$.

k) Finden Sie die Lösungen x der Gleichung $2^{\ln x} x^{1+\ln x} = \frac{1}{2}$.

11 Funktionen

In der Technik und in den Naturwissenschaften bezeichnet man eine Größe, deren Wert von einer oder mehreren anderen Größen abhängt, als eine *Funktion*. Beispiele sind die Länge des Bremsweges in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit, der Ernteertrag in Abhängigkeit vom eingesetzten Dünger oder der Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe. Hängt die Funktion dabei nur von eine Größe x ab, so schreibt man oft $f(x)$ für den Wert der Funktion f an der Stelle x . x liegt dabei im *Definitionsbereich* A der Funktion, der Wert $f(x)$ liegt im *Wertebereich* B der Funktion. In den meisten Anwendungen sind A und B Teilmengen der reellen Zahlen. Für allgemeinere Funktionen können dies aber auch andere Mengen sein. Funktionen $f : A \rightarrow B$ lassen sich mathematisch dadurch beschrieben, dass der Wert $f(x)$ an der Stelle x angegeben wird. Dies geschieht oft durch Angabe der *Zuordnungsvorschrift* $x \mapsto f(x)$. Ist

der Definitionsbereich einer Funktion nicht explizit angegeben, ist meist der maximale Definitionsbereich gemeint.

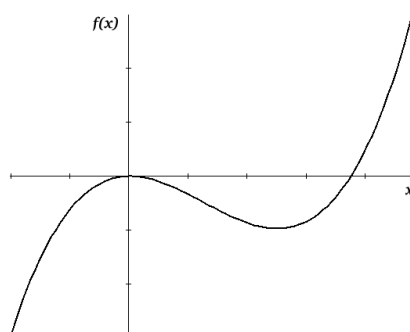
Beispiele für Funktionen: *Lineare Funktionen:* $f(x) = ax$ oder $x \mapsto ax$ mit einer festen Zahl a .

Potenzfunktionen: $f(x) = x^r$ mit einer festen Zahl $r \in \mathbb{R}$.

Exponentialfunktionen: $f(x) = a^x$ mit einer festen Zahl $a > 0$.

Logarithmusfunktionen: $f(x) = \log_b x$ mit einer festen Zahl $1 \neq b > 0$.

In der Schule haben Sie Funktionen zumindest bei der Kurvendiskussion kennengelernt und dort spezielle Eigenschaften (Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Definitionsbereich, Nullstellen, Monotonie, lokale Minima und Maxima, . . .) berechnet und den Funktionsgraphen im Koordinatensystem dargestellt.



Der Graph einer Funktion

Bestimmen Sie bei den folgenden Funktionen den Definitionsbereich und skizzieren Sie die Funktionen (ohne etwas auszurechnen! Hier geht es nur darum, ob Sie ein Gefühl dafür haben, wie der Graph der Funktion aussieht. Wenn Sie nicht weiter wissen, können Sie auch eine Wertetabelle verwenden):

a) $f(x) = 2x$,

b) $f(x) = x^2 - 1$,

c) $f(x) = \sqrt{x}$,

d) $f(x) = e^x$,

e) $f(x) = \ln x$.

f) $f(x) = \frac{1}{x}$

Hat bei einer Funktion jedes Element $y = f(x)$ des Wertebereiches genau ein Urbild x im Definitionsbereich (mathematisch kann man dies so ausdrücken: Aus $f(x) = f(y)$ folgt $x = y$), so nennt man die Funktion f umkehrbar. In diesem Fall wird durch die Zuordnungsvorschrift $y \mapsto x = f^{-1}(y)$ die Umkehrfunktion f^{-1} zu f definiert. Streng monoton wachsende bzw. streng monoton fallende Funktionen sind umkehrbar (Sie wissen noch, was streng monoton wachsend und streng monoton fallend bedeutet?). Man erhält die Umkehrfunktion (als Funktion von y), indem man die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflöst. So besitzt die Funktion $f(x) = x^3$ (diese ist streng monoton wachsend) die Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$. Aber Achtung: *Nicht jede Funktion besitzt eine Umkehrfunktion!*

g) Wann ist eine Funktion auf ihrem Definitionsbereich streng monoton wachsend?

h) Welche der Funktionen in a)–f) sind umkehrbar? Wie lauten die Umkehrfunktionen?

Im Analysisunterricht an der Schule haben Sie zwei Operationen mit Funktionen kennengelernt: Differenzieren und Integrieren. Beide Operationen werden durch *Grenzwertprozesse* beschrieben, welche auch beim Konzept der *Stetigkeit* einer Funktion grundlegend sind. Solche Grenzwertprozesse sind das Handwerkszeug der Mathematiker und Mathematikerinnen. Hier werden wir uns nicht so sehr um die genauen Definitionen kümmern (vielleicht sind Sie in der Schule von der Epsilontik, d.h. von Redewendungen wie „Zu $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle . . .“, erschlagen wurden), sondern mehr auf die intuitive Vorstellung eingehen, die man von Grenzwertprozessen haben sollte.

Anschaulich konvergiert eine Folge reeller Zahlen x_n gegen eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$, den *Grenzwert der Folge* x_n , wenn die Folgeglieder bei $n \rightarrow \infty$ gegen den Wert x_0 streben. So konvergiert beispielsweise die

Folge $x_n = \frac{1}{n}$ bei $n \rightarrow \infty$ gegen den Grenzwert 0, da die Zahlen $\frac{1}{n}$ beliebig nahe an 0 heranreichen. In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ist f eine Funktion und x_0 im Definitionsbereich, so lassen sich Folgen $x_n \rightarrow x_0$ im Definitionsbereich betrachten, die zugehörigen Funktionswerte $f(x_n)$ der Folgeglieder x_n sowie der Funktionswert $f(x_0)$ des Grenzwertes x_0 . *Eine Funktion heißt stetig an der Stelle x_0 des Definitionsbereiches, wenn für alle Zahlenfolgen, die im Definitionsbereich gegen x_0 konvergieren, die Bilder $f(x_n)$ im Wertebereich gegen $f(x_0)$ konvergieren.* Beachten Sie, dass dies für alle Folgen x_n mit Grenzwert x_0 im Definitionsbereich gelten muss. Stetig im Punkt x_0 bedeutet damit: Wann immer x im Definitionsbereich gegen x_0 im Definitionsbereich konvergiert, strebt $f(x)$ gegen $f(x_0)$ im Wertebereich der Funktion. Man drückt dies so aus: Für alle Folgen $x_n \rightarrow x_0$ im Definitionsbereich gilt

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} f(x_n) = f(x_0),$$

$$\text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Gilt dies für alle x_0 im Definitionsbereich, so nennt man die Funktion stetig. Anschaulich bedeutet Stetigkeit, dass man den Graphen der Funktion „ohne abzusetzen“ durchzeichnen kann. Einer Funktion kann man also ansehen, ob sie stetig oder unstetig ist.

i) Welche der folgenden Funktionen ist auf Ihrem Definitionsbereich stetig: $f(x) = \frac{x+1}{3}$, $f(x) = x^2$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -1, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}.$$

12 Logarithmus- und Exponentialfunktionen

Bei dem Logarithmus $\log_b x$ zur Basis b (wie immer: $1 \neq b > 0$) können wir für x jede positive reelle Zahl einsetzen. Durch die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto \log_b x$ wird eine Funktion mit dem Definitionsbereich $\mathbb{R}_{>0}$ der positiven reellen Zahlen erklärt, die *Logarithmusfunktion zur Basis b* . $f(x) = \log_b x$ hat folgende Eigenschaften

- Definitionsmenge der Logarithmusfunktion sind die positiven Zahlen, der Wertebereich ist die Menge aller reellen Zahlen.
- Die Logarithmusfunktion $\log_b x$ ist streng monoton wachsend für $b > 1$ und streng monoton fallend für $0 < b < 1$.
- Logarithmusfunktionen sind stetig.
- Alle Logarithmusfunktionen haben dieselbe Nullstelle x_0 , nämlich $x_0 = 1$.

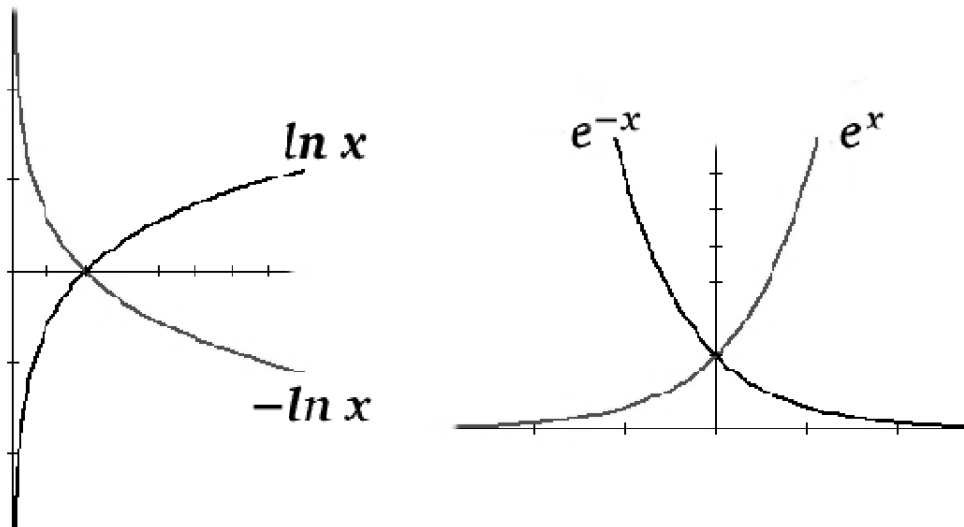
Von herausgehobener Rolle in der Mathematik ist die *natürliche Logarithmusfunktion* $f(x) = \ln x$.

a) Welche Basen b sind bei den Logarithmusfunktionen zugelassen?

b) Kennen Sie neben der Nullstelle noch weitere spezielle Werte von $\log_a x$?

c) Skizzieren Sie die Graphen der Logarithmusfunktionen $\log_2 x$ und $\log_{\frac{1}{2}} x$.

d) Mit den Logarithmengesetzen ist $\log_b x = -\log_{\frac{1}{b}} x$. Was bedeutet dies für die Graphen der Logarithmusfunktionen $\log_b x$ und $\log_{\frac{1}{b}} x$?



Graphen der Logarithmusfunktionen $\ln x$ und $-\ln x$ und der Exponentialfunktionen e^x und e^{-x}

Bei einer Potenz a^x mit positiver Basis a können wir für x jede reelle Zahl einsetzen. Benutzen wir hier die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto a^x$, so haben wir die *Exponentialfunktion zur Basis a* definiert. Von herausgehobener Bedeutung für die Mathematik ist die Exponentialfunktion zur Basis e , wo e die Eulersche Zahl ist. Die Funktion $f(x) = e^x$ heißt deswegen *die (natürliche) Exponentialfunktion* (hier lässt man in der Sprechweise den Bezug auf die Basis einfach weg und auch der Zusatz „natürlich“ wird meistens weggelassen). Exponentialfunktionen haben folgende Eigenschaften

- Definitionsmenge ist die Menge der reellen Zahlen, der Wertebereich ist die Menge der positiven Zahlen (insbesondere haben Exponentialfunktionen *keine Nullstellen*).
- a^x ist streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$. Für $a = 1$ ist die Funktion $f(x) = 1^x = 1$ eine konstante Funktion.
- Exponentialfunktionen sind stetig.
- Alle Exponentialfunktionen haben denselben Wert an der Stelle 0, nämlich $a^0 = 1$.

e) Welche Basen a sind bei den Exponentialfunktionen zugelassen?

f) Skizzieren Sie die Graphen der Exponentialfunktion e^x und $(\frac{1}{e})^x = e^{-x}$.

g) Mit den Potenzgesetzen ist $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$. Was bedeutet dies für die Graphen der Exponentialfunktion a^x und $(\frac{1}{a})^x$?

h) Rechnen Sie nach: $a^x = e^{x \ln a}$ (Exponentialfunktionen zu beliebigen Basen lassen sich also durch die (natürliche) Exponentialfunktion ausdrücken).

i) Rechnen Sie nach: a^x ist die Umkehrfunktion zu $\log_a x$ ($1 \neq a > 0$).

j) Besitzt die Gleichung $e^x = \ln x$ eine Lösung?

In den Naturwissenschaften werden mit Exponentialfunktionen Wachstums- und Zerfallsprozesse beschrieben. Dies gilt beispielsweise für das Wachstum von Zellkulturen und den radioaktiven Zerfall.

k) Eine Zellkultur in einer Nährlösung verdoppelt sich durch Zellteilung alle 4 Stunden. Zu Beginn eines Beobachtungszeitraums betrage die Masse M der Zellkultur 1g. Tragen Sie in eine Wertetabelle die Masse der Zellkultur zur Zeit $t = 0$ Stunden, $t = 4$ Stunden, $t = 8$ Stunden und $t = 12$ Stunden auf. Wieviel wog die Zellkultur 8 Stunden *vor* Beginn des Beobachtungszeitraumes (das ist der Zeitpunkt $t = -8$ Stunden)? Geben Sie auch die Funktionsvorschrift der Funktion $M(t)$ an und skizzieren Sie ihren Graphen.

1) Ein radioaktives Präparat zerfällt mit einer Halbwertszeit von 50 Jahren. Sei M_0 die Menge des Präparates zur Zeit $t = 0$. Geben Sie die Funktionsvorschrift der Funktion $M(t)$ an, welche die Menge des Präparates zur Zeit t angibt.

ABSCHLUSSTEST

1. Berechnen Sie die Lösungen x der folgenden Gleichungen:

- a) $1 + x = \frac{5}{x-3}$,
b) $5x^2 - 3 + x^3 - x = 2x^2 - 3(1 - 3x)$,
c) $x + 1 = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$.

2. Berechnen Sie:

- a) $\frac{n-m}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} - \frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} + 3\sqrt{m}$,
b) $\left(\sqrt[4]{\frac{bc^3}{a^2}} \cdot \frac{\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{b^5c}} \right) : \sqrt[3]{\frac{ac}{b}}$.

3. Eine Batterie versorgt die Beleuchtung einer Baustelle. Bei acht angeschlossenen Lampen reicht sie für 11 Nächte. Wie lange reicht sie, wenn drei zusätzliche Lampen angeschlossen werden?

4. 80% der Teilnehmenden am diesem Kurs essen mittags in der Mensa, 15% sind Selbstversorger und die restlichen drei Teilnehmenden ernähren sich nur von Kaffee und Zigaretten. Berechnen Sie die Gesamtzahl der Teilnehmer des Kurses.

5. Welche der folgenden Ausdrücke sind sinnlos (nicht definiert)? $\sqrt{\frac{0}{\pi}}$, e^π , 0^0 , $(-2)^2$, $(-2)^x$, $\log_2(-2)$, $\log_{-2} 2$, $(e^{-2})^{-\frac{1}{2}}$, 2^{-x} .

6. Stellen Sie die folgenden Logarithmen durch den natürlichen Logarithmus \ln dar:

$$\log_3 3, \quad \log_{\frac{1}{e}} 2, \quad \log_b x.$$

7. Skizzieren Sie den Graphen der Funktionen $x \mapsto x^2 + 1$ und $x \mapsto \sqrt{x^2}$. Hat die Gleichung $x^2 + 1 = \sqrt{x^2}$ eine Lösung?

8. Das Gesetz des radioaktiven Zerfalls einer radioaktiven Substanz lautet

$$M(t) = M_0 e^{-\lambda t}.$$

Hierbei bei M_0 die Menge der radioaktiven Substanz zur Zeit $t = 0$ und $M(t)$ die Menge zur Zeit t . $\lambda > 0$ ist eine von der Substanz abhängende Konstante. Berechnen Sie in Abhängigkeit von λ die Halbwertszeit T der radioaktiven Substanz, also die Zeit, nach der jeweils die Hälfte der Substanz zerfallen ist.

(Hinweis: Zur Zeit T ist Hälfte der Substanz zerfallen, d.h. es gilt: $M(T) = M_0 e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} M(0) = \frac{1}{2} M_0 e^{-\lambda \cdot 0} = \frac{1}{2} M_0$. Die Gleichung $M_0 e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} M_0$ kann nach T aufgelöst werden.)

Hinweise zu den Lösungen

Es kann sein, dass sich bei diesen Lösungen noch einige Fehler eingeschlichen haben. Wenn Sie beim mehrfachen Nachrechnen einer Aufgabe eine Lösung berechnet haben, die sich von der hier angegebenen Lösung unterscheidet, sollten Sie die hier aufgeschriebene Lösung überprüfen (wo dies möglich ist, etwa durch eine Probe). Darüberhinaus gibt es bei vielen Aufgaben mehrere Lösungswege. Es macht daher nichts, wenn Sie die Lösung einer Aufgabe auf einem Weg gefunden haben, der sich von dem in den Hinweisen vorgeschlagenen Weg unterscheidet. Wesentlich ist nur, dass Ihr Lösungsweg *mathematisch korrekt* ist und auf die richtige Lösung führt.

Test

- $\frac{13}{20} < 0,66 < \frac{2}{3} < 0,66667 < \frac{11}{12} < \frac{1002}{1001} < \frac{12}{11}$.
- Beide Alternativen sind gleich. Ist P der Nettopreis, so ist der Endpreis der ersten Alternative $P \cdot 0,9 \cdot 1,16$ und derjenige der zweiten Alternative $P \cdot 1,16 \cdot 0,9$.
- $\frac{4800 m}{12800 km} m = \frac{4800 m}{12800000 m} m = 0,000375 m \approx 0,4 mm$.
- a)** $\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1-\frac{1}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{1}{2}$, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + b = \frac{a^2+b^2+ab^2}{ab}$.
- b)** $x = \frac{1}{2}$ bzw. $y = 2$.
- $2 = \left(\sqrt{2}\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $\sqrt{3}\sqrt{27} = (\sqrt{3} + \sqrt{12})\sqrt{3}$.
- a)** $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ und $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$.
- b)** $x = -6$ und $x = 2$.

7.

			1		
			1	1	
		1	2	1	
	1	3	3	1	
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

8. Das Angebot der zweiten Bank ist günstiger. Nach einem Jahr wird ein Grundkapital K_0 bei der ersten Bank einmal verzinst mit $K_{\text{Bank 1}} = K_0 \cdot 1,06$. Bei der zweiten Bank erhalten Sie nach einem Jahr auch schon Zinseszinsen mit $K_{\text{Bank 2}} = K_0 \cdot (1,015)^4$. Hierbei ist $(1,015)^4 = (1 + 0,015)^4 = 1 + 4 \cdot 0,015 + 6 \cdot (0,015)^2 + 4 \cdot (0,015)^3 + (0,015)^4 > 1,06$.

9.a) $\log_6 2 + \frac{1}{\log_3 6} = 1$ (beachten Sie: $\log_3 6 = \frac{\log_6 6}{\log_6 3}$), $\frac{2}{3} \log_a \sqrt{a^b} + \frac{b}{3} \log_a \sqrt{a^4} = b$.

9.b) $x = \pm\sqrt{2}$ bzw. $y = 2$.

1 Zahlbereiche und Rechenregeln

b) $a+(b+a) = 2a+b$, $a \cdot (b+c) = ab+ac \neq ab+c$, $a \cdot (b \cdot (c+b)) = ab(c+b) = abc+ab^2 \neq abc+b^2$,
 $((a \cdot b) + a) \cdot c = abc + ac = a(b+1)c$, $\frac{b}{c} : a = \frac{b}{ca}$, $\frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b} \neq \frac{a-1}{b}$.

c) $2(-u + v(u+v)) + u(u-2v) = -2u + 2v^2 + u^2$, $(p+q)(p+q) - (p-q)(p-q) = 4pq$,
 $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$, $(1+q+q^2+\dots+q^n)(1-q) = 1 - q^{n+1}$.

d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy} = \frac{y+x-1}{xy}$, $\frac{5+\frac{1}{10}-\frac{3}{5}}{7+\frac{1}{5}} + \frac{1-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}{4-\frac{1}{2}} = \frac{31}{56}$, $\frac{a+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+b} + \frac{1}{a} - b = \frac{a^2+b-ab^2}{ab}$, $\frac{xy}{\frac{1}{4} + \frac{(x-y)^3}{x-y}} + 14 = \frac{xy+14(x+y)^2}{(x+y)^2}$,

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}} = \frac{2+x}{3+2x}.$$

e) $2(x^2) - \frac{2(x+y)^2}{(2x)^2} = 2x^2 - \frac{2(x+y)^2}{(2x)^2}$, $((2+x)x^2)(x+y^2) = (2+x)x^2(x+y^2)$, $x^{(2+3)}(xy)^2 = x^{2+3}(xy)^2$,

$$((x+y)(x-y^2)+1)x^2, ((2((x^2+1))+x)^2 = (2(x^2+1)+x)^2.$$

$$\text{f) } \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}, \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{11}{30}, \frac{-1}{3} : \frac{2}{-3} = \frac{1}{2}, \frac{1-\frac{1}{5}}{2+\frac{1}{5}} = \frac{12}{7}, -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = 0.$$

$$\text{g) } \frac{49}{7} = 7, \frac{49}{17}, \frac{15 \cdot 27}{6 \cdot 5} = \frac{27}{2}, \frac{5x+x^2}{(y+2)x} = \frac{5+x}{y+2}, \frac{25a+5a}{\frac{a^2}{5a}} = 150, \frac{a^2-1}{a+1} = a-1, \frac{a^2+1}{a+1}.$$

$$\text{h) } x(x+y) - x = x(x+y-1), 2x^2 + 6x + 4x^3 = 2x(x+3+2x^2), x+y-2(x-\frac{y}{2}).$$

$$\text{i) } \frac{1}{x} + \frac{x}{y} = \frac{y+x^2}{xy} \neq \frac{xy+1}{xy}, \frac{a}{b} : \frac{a+b}{a-b} = \frac{a^2-ab}{b^2+ab}, (-x)^3 = -x^3.$$

2 Mathematische Symbole

b) $\sqrt{2}$ ist die Wurzel aus 2, also die positive (!) Zahl, die mit sich selbst multipliziert 2 ergibt.

c) $(-\frac{1}{2})^3 = -\frac{1}{8}$, $(-1)^3 = -1$ und $5^3 = 125$.

d) Ja.

e) Nein. Z.B. ist $2 > -3$, aber $\frac{1}{2} > -\frac{1}{3}$.

f) $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ bedeutet: Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen

ist gleich $\frac{n(n+1)}{2}$, z.B. ist $1 + 2 + \dots + 10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$.

g) $\{0, 1\}$ ist die Menge die aus den beiden Elementen 0 und 1 besteht, $\{x \in \mathbb{R} : x > 2\}$ ist die Menge aller reellen Zahlen, die größer als 2 sind, $[2, 5[$ ist die Menge aller reeller Zahlen die größer oder gleich 2 und kleiner als 5 sind. In manchen Mathematikbüchern wird hierfür auch $[2, 5)$ geschrieben.

h) $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, $\frac{10!}{8!} = 9 \cdot 10 = 90$.

i) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

j) $\pi = 3.14\dots$, $e = 2,71\dots$

k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ bedeutet: Der Grenzwert der Folge $\frac{1}{n}$ bei n gegen unendlich ist 0.

3 Gleichungen

a) $x + 7 = 2x - 3$ hat die Lösung $x = 10$, $x + \frac{1}{x} = 2$ hat die Lösung $x = 1$, $\frac{x-1}{x^2-1} = 0$ lässt sich nicht nach x auflösen (1 ist Nullstelle des Nenners), $\frac{1}{4} = \frac{1}{x^2}$ hat die Lösungen $x = \pm\sqrt{2}$, $x^3 = 2x$ besitzt die Lösungen $x = 0$ und $x = \pm\sqrt{2}$, $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = 1$ besitzt keine Lösung.

b) $p = 100 \frac{P}{G}$, $G = 100 \frac{P}{p}$.

c) $a = \frac{cd}{b}$, $b = \frac{cd}{a}$, $c = \frac{ab}{d}$ und $d = \frac{ab}{c}$.

d) Hier muss man auch die Einheiten multiplizieren bzw. kürzen (1 kg = 1000 g benutzen).

e) $(x_0, y_0) = (-4, -11)$.

f) Hier hat beim Quadrieren beider Seiten die sich ergebende Gleichung mehr Lösungen. Deshalb sollte man beim Lösen von „Wurzelgleichungen“ immer eine Probe machen.

g) $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$, falls der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ ist, d.h. falls $p^2 - 4q \geq 0$ ist.

h) $x = \log_2 y$. \log_2 ist der Logarithmus zur Basis 2.

4 Prozentrechnung

a) $G = 100 \frac{P}{p}$, $p = 100 \frac{P}{G}$, $p\% = \frac{P}{G}$.

b) $p = 16$, $G = 50$, also $P = \frac{16}{100} \cdot 50 = 8$.

c) $G = 8000$ DM, $P = 480$ DM, also $p = 100 \cdot \frac{480}{8000} = 6$. Sie erhalten 6% Zinsen.

d) Sie haben folgende Gleichung zu lösen: $M_{neu} = M_{alt} + \frac{7}{100} M_{alt} = \frac{107}{100} M_{alt}$. (Es ist $P = M_{neu} = 557,47$ DM und $p = 107$. Gesucht ist $G = M_{alt}$.) Ihre alte Miete betrug demnach $M_{alt} = \frac{100}{107} M_{neu} =$

$\frac{100}{107} 557,47 \text{ DM} = 521 \text{ DM}$.

e) Montag und Freitag sind $\frac{2}{5}$ der 5 Arbeitstage, also 40% aller Arbeitstage.

5 Dreisatz

a) Preis in DM und Preis in Euro sind proportional zueinander, genauso wie die in kW und PS gemessene Leistung. Die Fläche $F = \pi r^2$ ist weder proportional noch umgekehrt proportional zum Radius r des Kreises (aber sie ist proportional zum Quadrat r^2 des Radius). Das Volumen eines Gases und der Druck eines Gases stehen bei konstanter Temperatur in einer umgekehrt proportionalen Beziehung. Dies besagt das *Gesetz von Boyle* (vgl. Aufgabe 5.f) unten).

b) Die Fläche der Deutschlandkarte ist nur $\left(\frac{1}{1\,000\,000}\right)^2 = \frac{1}{1\,000\,000\,000\,000}$ mal so groß wie die tatsächliche Fläche Deutschlands.

c) $1 \text{ DM} = \frac{1}{1,95583} \text{ Euro} \approx 0,51 \text{ Euro}$.

d) $48 \text{ DM} \approx 24,54 \text{ Euro}$.

e) Dies ist keine Dreisatzaufgabe. Sie können so schnell zurückfahren wie Sie wollen, die angestrebte Durchschnittsgeschwindigkeit erreichen Sie nie! Wieso? Die Entfernung von Nürnberg nach Frankfurt sei L . Für die Hinfahrt benötigen Sie dann die Zeit $t_1 = \frac{L}{50 \frac{\text{km}}{\text{h}}}$. Für die Rückfahrt benötigen Sie bei einer Geschwindigkeit v die Zeit $t_2 = \frac{L}{v}$. Insgesamt benötigen Sie für Hin- und Rückfahrt die Zeit

$$t_{\text{gesamt}} = t_1 + t_2 = \frac{L}{50 \frac{\text{km}}{\text{h}}} + \frac{L}{v}.$$

Bei einer Gesamtdurchschnittsgeschwindigkeit von $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ würden Sie für Hin- und Rückfahrt (die Entfernung ist hier $2L$) die Zeit

$$t_{\text{gesamt}} = t_1 + t_2 = \frac{2L}{100 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{L}{50 \frac{\text{km}}{\text{h}}}$$

benötigen. Dies führt auf die Gleichung

$$\frac{L}{50 \frac{\text{km}}{\text{h}}} + \frac{L}{v} = \frac{L}{50 \frac{\text{km}}{\text{h}}},$$

welche sich umformen lässt zu

$$\frac{L}{v} = 0.$$

Für $L \neq 0$ (was bei der Strecke von Nürnberg nach Frankfurt der Fall ist), lässt sich diese Gleichung nicht nach v auflösen. Wie Sie sehen, können Sie statt $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ beliebige Geschwindigkeiten w und $2w > 0$ einsetzen. Wenn diese Aufgabe schon keine Lösung besitzt, kann man mit ihr aber das ein oder andere Bier bei einer Wette gewinnen! Wenn Sie auf $150 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ getippt haben, sollten Sie sich merken, dass man eine mathematische Methode nicht ohne Überlegung anwenden sollte.

f) $p \cdot V = C$ bzw. $p = \frac{C}{V}$. Eine Verdoppelung des Volumens auf $2V$ führt zu einer Halbierung des Druckes.

g) Fläche \cdot Quadratmeterpreis = Preis des Teppichbodens. Daher ist Fläche = $\frac{816}{25,50} \text{ qm} = 32 \text{ qm}$.

h) $1 \text{ Liter} = \frac{1}{3,785} \text{ Gallonen} = \frac{1}{0,5688} \text{ Pint}$. Also ist $1 \text{ Gallone} = \frac{3,785}{0,5688} \text{ Pint} \approx 6,654 \text{ Pint}$.

i) Aus $F = r^2 \pi$ folgt, dass der Radius um $\sqrt{2}$ vergrößert werden um seine Fläche zu verdoppeln? (Beachte: Hier sind F und r in keinem proportionalen Verhältnis).

j) Aus $U = 2r\pi$ folgt, dass eine Vervierfachung des Radius eine Vervierfachung des Umfangs bewirkt. Der Umfang nimmt also um 400% zu.

k) x Anzahl der Angestellten, y Wochenarbeitszeit. Der Arbeitsaufwand $A = x \cdot y = 120 \cdot 40$ Stunden. Für

$y = 37,7$ ist $x = \frac{120 \cdot 40 \text{ Stunden}}{y} = \frac{120 \cdot 40 \text{ Stunden}}{37,5 \text{ Stunden}} = 128$. Rein rechnerisch müssten 8 neue Angestellte eingestellt werden. Dies wäre eine Zunahme $0,0666 \dots \%$, während die Arbeitszeit nur um $2,5$ Stunden bzw. $0,0625\%$ verkürzt würde. Ist ihnen klar, wieso diese Prozentzahlen verschieden sind? Das können Sie sich daran klar machen, dass Sie den Fall einer Halbierung der Arbeitszeit, also eine Kürzung um 50% betrachten. Hier müssten 120 Angestellte zusätzlich eingestellt werden, was eine Zunahme von 100% ausmacht.

l) 17% .

m) Jetzt mal mit dem „Schulrezept“:

Behauptungssatz: 3 Maurer benötigen 2 Tage

Zwischensatz: 1 Maurer benötigt 6 Tage

Schlussatz: 2 Maurer benötigen $\frac{6}{2}$ Tage = 3 Tage

6 Binomische Formeln

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(x+2a)^2 = x^2 + 4xa + 4a^2$, $(y-x)^2 = y^2 - 2yx + x^2$, $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$, $(x-a)(a+x) = x^2 - a^2$, $(2-a)(2+a) = 4 - a^2$.

b) $(x-(-y))^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, $(x+(-y))^2 = (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

c) $\binom{4}{0} = 1$, $\binom{4}{1} = 4$, $\binom{4}{2} = 6$, $\binom{4}{3} = 4$ und $\binom{4}{4} = 1$.

d) $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$.

e) $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$ bzw. $x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$.

f) $y^3 - 3y^2a + 3ya^2 - a^3$ bzw. $2^4 + 4 \cdot 2^3b + 6 \cdot 2^2b^2 + 4 \cdot 2^1b^3 + b^4 = b^4 + 8b^3 + 24b^2 + 32b + 16$.

7 Quadratische Gleichungen

a) $x = \pm \frac{1}{2}$, $y = 0$, $z = \pm 2$, $a = 0$ oder $a = 4$, $b = 0$ oder $b = -\frac{3}{2}$, die Gleichung $100c^2 + 10 = 0$ bzw. $c^2 = -\frac{1}{10}$ besitzt keine Lösung.

b) Spezialfall mit $a = 1$, $b = p$ und $c = q$.

c) Hat $x^2 + px + q$ die Lösungen $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ und $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, so ist $x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p$ und (mit der 3. Binomischen Formel)

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right) = q.$$

d) $2x^2 - 3x + 4 = 0$ besitzt die Diskriminante $9 - 32 = -23$ und hat keine reelle Lösung, $-10x^2 + 9x - 3 = 0$ besitzt die Diskriminante $81 - 120 = -39$ und hat keine reelle Lösung, $x^2 - 8x + 16 = 0$ besitzt die Diskriminante $64 - 64 = 0$ und hat eine reelle Lösung, $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{6} = 0$ besitzt die Diskriminante $\frac{4}{9} + \frac{10}{6} = \frac{19}{9}$ und hat zwei reelle Lösungen.

e) $a_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4xz}}{2x}$ im Fall $y^2 - 4xz \geq 0$ und (sonst wäre dies keine quadratische Gleichung) $x \neq 0$.

f) $b^2 + xb - x^2$ besitzt die Lösungen $b_{1,2} = -\frac{x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + x^2} = -\frac{x}{2} \pm \frac{x}{2}\sqrt{5}$, $x^2 + bx + c = 0$ besitzt im Fall $x \neq 0$ die Lösung $b = -\frac{x^2+c}{x}$ (bezüglich b ist dies keine quadratische Gleichung!).

g) $x^4 - 16 = 0$ besitzt die Lösungen $x = \pm 2$, $x^4 - 19x^2 + 100 = 0$ besitzt keine Lösung (Diskriminante ist $19^2 - 400 < 0$), $x^3 - 25x = 0$ besitzt die Lösungen $x = 0$ oder $x = \pm 5$, $2x^3 + 6x^2 + 5x = 0$ besitzt nur die Lösung $x = 0$ (Diskriminante von $2x^2 + 6x + 5 = 0$ ist negativ).

h) $(a^2 - 24)^2 - 2a^2 + 49 = (a^2 - 24)^2 - 2(a^2 - 24) + 1 = 0$ ist eine quadratische Gleichung für $a^2 - 24$. $y^2 - 2y + 1 = 0$ besitzt die einzige Lösung $y = 1$. Damit ist $a^2 - 24 = 1$ bzw. $a = \pm 5$. $(a^2 - 14)^2 = 5(6a^2 - 49)$ lässt sich umformen zu $\frac{1}{5}(a^2 - 14)^2 - 6a^2 + 49 = \frac{1}{5}(a^2 - 14)^2 - 6(a^2 - 14) - 84 + 49 = \frac{1}{5}(a^2 - 14)^2 - 6(a^2 - 14) - 35 = 0$. Die quadratische Gleichung $\frac{1}{5}y^2 - 6y - 35 = 0$

besitzt die Lösungen $y = -5$ und $y = 35$. Also ist $a^2 - 14 = -5$ oder $a^2 - 14 = 35$. Damit haben wir die vier Lösungen $a = \pm 3$ oder $a = \pm 7$.

i) Für $x \neq 0$ und $x \neq 2$ lässt sich $\frac{x+3}{x} + \frac{x}{x-2} = 5$ umformen zu $\frac{(x-2)(x+3)+x^2-5x(x-2)}{x(x-2)} = \frac{-3x^2+11x-6}{x(x-2)} = 0$. Hier ist $-3x^2 + 11x - 6 = 0$ für $x = \frac{11 \pm 7}{6}$, also für $x = 3$ und für $x = \frac{2}{3}$.

$\frac{x+1}{x-1} = -\frac{x-2}{x+1}$ lässt sich für $x \notin \{-1, 1\}$ umformen zu $\frac{(x+1)^2+(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x^2-x+4}{(x-1)(x+2)} = 0$. Da $2x^2 - x + 4$ keine Lösung besitzt (Diskriminante ist $1 - 32 = -31$, besitzt auch die ursprüngliche Bruchgleichung keine Lösung).

j) Für $y \neq \frac{3}{2}$ und $y \neq 0$ formen wir $\frac{y}{2y-3} - \frac{1}{2y} = \frac{3}{4y-6}$ um zu $\frac{y}{2y-3} - \frac{1}{2y} - \frac{3}{2(2y-3)} = \frac{2y^2-(2y-3)-3y}{2y(2y-3)} = \frac{2y^2-5y+3}{2y(2y-3)} = 0$. Die quadratische Gleichung $2y^2 - 5y + 3$ besitzt die Lösungen $y = \frac{5 \pm 1}{4}$. Hiervon ist nur $y = 1$ Lösung der ursprünglichen Gleichung ($y = \frac{3}{2}$ liegt nicht im Definitionsbereich der Bruchgleichung).

k) $\frac{2y}{y-4} + \frac{3y}{y+4} = \frac{4(y^2-y+4)}{y^2-16}$ schreiben wir mit $y^2 - 16 = (y+4)(y-4)$ für $y \neq \pm 4$ um zu $\frac{2y(y+4)+3y(y-4)-4(y^2-y+4)}{y^2-16} = \frac{y^2-16}{y^2-16} = 0$. Diese Gleichung besitzt keine Lösung.

8 Wurzelgleichungen

a) Definitionsbereich von $\sqrt{3-x} = \sqrt{x-1}$ ist $\{x : 1 \leq x \leq 3\} = [1, 3]$. Quadrieren der Gleichung gibt $3-x = x-1$ bzw. $x = 2$. Dies löst auch die Wurzelgleichung.

$\sqrt{4-x} = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$ hat den Definitionsbereich $\{x : 1 < x \leq 4\} =]1, 4]$ (Beachten Sie, dass $x = 1$ nicht zum Definitionsbereich gehört). Multiplizieren der Gleichung mit $\sqrt{x-1}$ und anschließendes Quadrieren gibt $(4-x)(x-1) = 4$ bzw. $x^2 - 5x + 8 = 0$. Diese Gleichung besitzt keine reelle Lösung (Diskriminante ist $25 - 32 = -7$).

$(x-1)\sqrt{5-x} + \sqrt{x-1} = 0$ hat den Definitionsbereich $\{x : 1 \leq x \leq 5\} = [1, 5]$. Ausklammern von $\sqrt{x-1}$ zeigt $\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}\sqrt{5-x} + 1) = 0$. Also ist $x = 1$ oder $\sqrt{x-1}\sqrt{5-x} = -1$. Wir könnten nun noch die zweite Gleichung quadrieren, um Kandidaten zu finden. Dies ist hier aber nicht notwendig. Die linke Seite der zweiten Gleichung kann nicht negativ sein, die rechte Seite ist aber negativ. Die zweite Gleichung hat daher keine reelle Lösung und $x = 1$ ist die einzige Lösung der ursprünglichen Wurzelgleichung.

b) $6 - \sqrt{1-4x} = \frac{1}{6}x$ lässt sich umformen zu $-\sqrt{1-4x} = \frac{1}{6}x - 6$. Quadrieren liefert $1 - 4x = \frac{1}{36}x^2 - 2x + 36$ bzw. $\frac{1}{36}x^2 + 2x + 35 = 0$ mit den Lösungen $x = -36 \pm 6$. $x = -30$ und $x = -42$ sind Kandidaten. Probe zeigt, dass beide Zahlen Lösungen sind ($\sqrt{1-4 \cdot (-30)} = 11$, $\sqrt{1-4 \cdot (-42)} = 13$). $\sqrt{13-4x} = 2-x$ führt nach Quadrieren auf $x^2 = 9$. Von den Kandidaten ± 3 löst nur $x = -3$ die Wurzelgleichung.

Quadrieren von $\sqrt{13-4x} = 4-x$ liefert $x^2 - 4x + 3 = 0$ und die Kandidaten 2 ± 1 . Beide Kandidaten $x = 1$ und $x = 3$ sind auch Lösungen.

c) Quadrieren von $\sqrt{x-5} = 5 - \sqrt{x}$ liefert $\sqrt{x} = 3$ also $x = 9$. Dies löst, wie die Probe zeigt, die Gleichung.

$\frac{\sqrt{x-3}}{9} - \frac{\sqrt{x+6}}{9} = 1$ bzw. $\frac{\sqrt{x-3}}{9} = \frac{\sqrt{x+6}}{9} + 1$ ergibt nach Quadrieren die Gleichung $\frac{x-3}{81} = \frac{x+6}{81} + \frac{2}{9}\sqrt{x+6} + 1$ bzw. $-5 = \sqrt{x+6}$. Diese Gleichung hat offenbar keine Lösung (linke Seite negativ, rechte Seite nicht negativ).

9 Potenzen und Wurzeln

a) $2^3 = 8$, $(2^2)^3 = 64$, $2^{2^3} = 256$, $3^3 = 27$.

b) $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{125} = 5$, $\sqrt[4]{81} = 3$.

c) $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{m}}}{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} = a^{\frac{n-m}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}}$.

d) $\sqrt{8} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, $\sqrt{12} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$, $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$ und

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{falls } a > 0 \\ 0 & \text{falls } a = 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}.$$

e) $2^{-2} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, $2^{-1} = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1$, $2^0 = 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$, $2^1 = 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $2^2 = 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

f) $\sqrt{2\sqrt{3}} = \sqrt[4]{12}$, $\sqrt[3]{\frac{5}{\sqrt{5}}} = \sqrt[6]{5}$, $\sqrt{a\sqrt[3]{a}} = \sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[5]{a^r\sqrt[3]{a^s}\sqrt{a^t}} = \sqrt[30]{a^{6r+2s+t}}$.

g) $a^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[4]{a^{-2}} \cdot \sqrt[3]{a^4} = a^0 = 1$, $\frac{a^3\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[4]{a}} = a^{\frac{17}{4}}$, $\sqrt[n]{a^r}\sqrt[m]{a^s} = a^{\frac{nr+ms}{mn}}$.

h) Man nimmt einfach mal an, dass $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ eine rationale Zahl ist mit p, q in \mathbb{N} . Durch Quadrieren erhält man $2 = \frac{p^2}{q^2}$. Indem man die Primfaktoren der natürlichen Zahlen p^2 und q^2 betrachtet (die in Quadraten immer paarweise vorkommen müssen) sieht man, dass die Gleichung $2 = \frac{p^2}{q^2}$ und somit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ nicht gelten kann. (Man hat so einen *Widerspruchsbeweis* geführt.)

i) $x = \pm i$.

10 Logarithmen

a) $\log_2 4 = 2$, $\log_2 8 = 3$, $\log_{10} 1000 = 3$, $\log_4 4 = 1$, $\log_4 8 = \frac{3}{2}$.

b) $\log_{10} 5 + \log_{10} 2 = \log_{10} 10 = 1$, $\log_2 14 - \log_2 28 = \log_2 \frac{1}{2} = -1$, $\log_3 27 - \log_2 4 = 3 - 2 = 1$.

c) $\log_b 2 + \log_b 3 = \log_b 6$, $\log_b 5 - \log_b 10 = \log_b \frac{1}{2}$, $\log_b 2 - \log_b 4 + \log_b 6 = \log_b \frac{2 \cdot 6}{4} = \log_b 3$, $\log_b \sqrt{2} - \frac{1}{2} \log_b 2 = 0$, $2 \log_b x + 3 \log_b y = \log_b (x^2 y^3)$.

d) $\log_b x^3 + \log_b x^2 = 5 \log_b x = \log_b x^5$, $\log_b 2x^2 - \log_b 4x = \log_b \frac{x}{2}$, $\log_a (\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x})^2 = \log_b x^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{7}{6} \log_b x$, $\log_a (x - y) + \log_a (x + y) = \log_a (x^2 - y^2)$.

e) $y = b$ (beachten Sie $\log_b b = 1$).

f) Ja. Für $a = \frac{1}{b}$ und $\log_{\frac{1}{b}} b = -1$ zeigt die Umrechnungsformel: $\log_b x = \frac{\log_{\frac{1}{b}} x}{\log_{\frac{1}{b}} b} = -\log_{\frac{1}{b}} x$.

g) $\frac{\log_4 8}{\log_4 4} = \frac{3}{2} = \frac{\log_2 8}{\log_2 4}$.

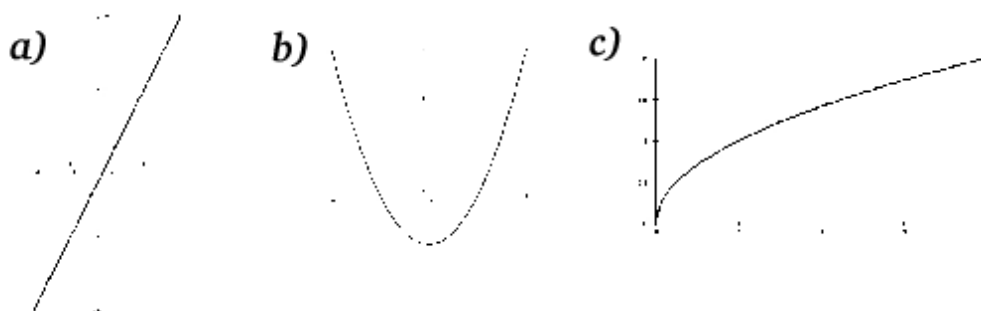
h) Mit $M = \log_b CE$ ist die Differenz zweier Magnituden $M_2 - M_1 = \log_b CE_2 - \log_b CE_1 = \log_b \frac{CE_2}{CE_1} = \log_b \frac{E_2}{E_1}$ bzw. $b^{M_2 - M_1} = \frac{E_2}{E_1}$. Ist $M_2 = M_1 + 1$ eine um 1 erhöhte Magnitude, so ist $E_2 = 30E_1$. Die obige Gleichung zeigt: $b = b^1 = b^{M_2 - M_1} = \frac{30E_2}{E_1} = 30$. Erhöht sich die Magnitude um den Wert 0,5, so gilt $E_2 = E_1 \cdot b^{0,5} = E_1 \cdot 30^{\frac{1}{2}}$. Die Energie erhöht sich damit um den Wert $\sqrt{30}$.

i) $\lg x + \lg(x - 2) = \lg 3$ lässt sich auch schreiben als $\lg(x(x - 2)) = \lg(x^2 - 2x) = \lg 3$. Dies zeigt die notwendige Bedingung $x^2 - 2x = 3$ bzw. $x = 1 \pm 2$. Da x im zweiten Summanden $\lg(x - 2)$ größer als 2 sein muss, ist $x = 3$ die Lösung.

j) $x^{\ln x} = 3$ führt nach Anwendung des natürlichen Logarithmus auf beiden Seiten zu $\ln(x^{\ln x}) = (\ln x)^2 = \ln 3$. Damit ist $\ln x = \pm \sqrt{\ln 3}$ und $x = e^{\pm \sqrt{\ln 3}}$.

k) $2^{\ln x} x^{1 + \ln x} = \frac{1}{2}$ lässt sich mit den Potenzgesetzen umformen zu $(2x)^{\ln x + 1} = 1$. Dies kann nur gelten, wenn $2x = 1$, also $x = \frac{1}{2}$ ist oder wenn $\ln x = -1$, also $x = \frac{1}{e}$ gilt.

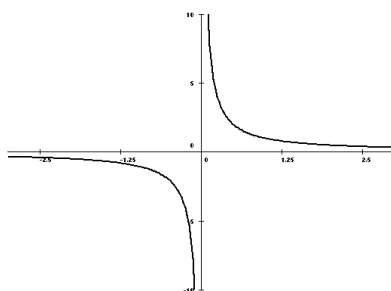
11 Funktionen



Beachten Sie, dass der Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ die Menge $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ aller nicht negativen reellen Zahlen ist.

d), e) vgl. Seite 12.

f) Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist definiert für alle $x \neq 0$.



g) Eine streng monoton wachsende Funktion erfüllt: $f(x) > f(y)$ für $x > y$. Beispiele sind a), c) sowie e^x und $\ln x$.

h) Die Funktionen aus a), c), d), e) und f) sind umkehrbar. Die Umkehrfunktionen sind $\frac{1}{2}y$, y^2 für (!) $y \geq 0$, $\ln y$, e^y und $\frac{1}{y}$.

i) $f(x) = \frac{x+1}{3}$ und $f(x) = x^2$ sind stetig, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -1, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$ ist hingegen unstetig im Punkt $x = 0$. Zum Beispiel ist für die gegen 0 konvergierende Folge $x_n = -\frac{1}{n}$ der Funktionswert $f(x_n) = -1$. Der Grenzwert dieser konstanten Folge ist ebenfalls -1 , der Funktionswert des Grenzwertes 0 der Folge $x_n = -\frac{1}{n}$ ist aber $f(0) = 1 \neq -1$. Am Graphen der Funktion sieht man die Unstetigkeitsstelle durch einen entsprechenden „Sprung“.

12 Logarithmus- und Exponentialfunktionen

a) $1 \neq b > 0$.

b) $\log_a a = 1$ und $\log_a \frac{1}{a} = -1$.

c) Vgl. Skizzen auf Seite 12.

d) Die Graphen sind symmetrisch zur x -Achse.

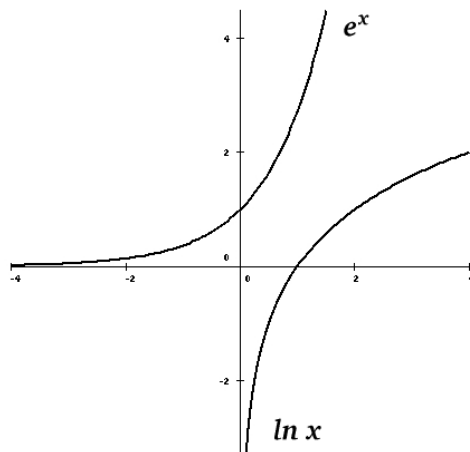
e) $a > 0$.

f) Vgl. Skizzen auf Seite 12.

g) Die Graphen sind symmetrisch zur y -Achse.

h) $e^{x \ln a} = (e^{\ln a})^x = a^x$.

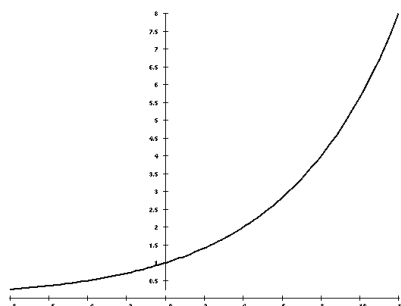
- i) So ist Logarithmus $x = \log_a(y)$ gerade definiert.
j) Nein. Die Graphen von e^x und $\ln x$ schneiden sich nicht.



k)

Zeit t in Stunden	-8	-4	0	4	8	12
Masse $M(t)$ in g	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Die Funktionsvorschrift ist $M(t) = 2^{\frac{t}{4}} g = e^{\frac{\ln 2}{4} t} g$.



l) Zur Zeit $t = 50$ Jahre beträgt die Menge $M(50) = \frac{1}{2} M_0 = M_0 2^{-1}$, nach 100 Jahren noch $M(100) = \frac{1}{4} M_0 = M_0 2^{-2}$. Die Funktionsvorschrift ist $M(t) = M_0 2^{-\frac{t}{50}} = M_0 e^{-\frac{\ln 2}{50} t}$.

Abschlusstest

1.a) Für $x \neq 3$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
 1 + x &= \frac{5}{x - 3} \\
 (1 + x)(x - 3) &= 5 \quad (\cdot(x - 3)) \\
 x^2 - 2x - 8 &= 0 \quad (\text{ausmultiplizieren und zusammenfassen}) \\
 x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1 + 8} \quad (\text{„p-q-Formel“})
 \end{aligned}$$

Damit sind $x = -2$ und $x = 4$ Lösungen.

1.b) Die Gleichung $5x^2 - 3 + x^3 - x = 2x^2 - 3(1 - 3x)$ läßt sich umformen zu

$$x^3 + 3x^2 - 10x = x(x^2 + 3x - 10) = 0$$

Die quadratische Gleichung $x^2 + 3x - 10$ hat die Lösungen $x = -5$ und $x = 2$. Zusätzlich ist auch $x = 0$ eine Lösung.

1.c) Die Gleichung $x + 1 = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ ist definiert für alle $x \geq -1$. Quadrieren beider Seiten der Gleichung liefert

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &= x+1 + 2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1} + x-1 \\ x^2 + 2x + 1 &= x+1 + 2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1} + x-1 \\ x^2 + 1 &= 2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1} \\ (x^2 + 1)^2 &= 4(x+1)(x-1) \\ x^4 + 2x^2 + 1 &= 4x^2 - 4 \\ x^4 - 2x^2 + 5 &= 0\end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für x^2 mit der negativen Diskriminante $(-2)^2 - 4 \cdot 5 = -16 < 0$. Sie besitzt keine reelle Lösung. Das gilt dann auch für die ursprüngliche Gleichung.

2.a)

$$\begin{aligned}&\frac{n-m}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} - \frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} + 3\sqrt{m} \\ &= \frac{(n-m)(\sqrt{m}+\sqrt{n}) - (m-n)(\sqrt{m}-\sqrt{n})}{(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}+\sqrt{n})} + 3\sqrt{m} \\ &= \frac{n\sqrt{m} + n\sqrt{n} - m\sqrt{m} - m\sqrt{n} - m\sqrt{m} + m\sqrt{n} + n\sqrt{m} - n\sqrt{n}}{m-n} + 3\sqrt{m} \\ &= \frac{2n\sqrt{m} - 2m\sqrt{m}}{m-n} + \frac{3\sqrt{m}(m-n)}{m-n} \\ &= \frac{2n\sqrt{m} - 2m\sqrt{m} + 3m\sqrt{m} - 3n\sqrt{m}}{m-n} \\ &= \frac{(m-n)\sqrt{m}}{m-n} \\ &= \sqrt{m}\end{aligned}$$

2.b)

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[4]{\frac{bc^3}{a^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^3 a^2}}{\sqrt[6]{b^5 c}}\right) : \sqrt[3]{\frac{ac}{b}} &= \left(\left(\frac{bc^3}{a^2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{(a a^2)^{\frac{1}{2}}}{(b^5 c)^{\frac{1}{6}}}\right) : \left(\frac{ac}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{b^{\frac{1}{4}} c^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{5}{6}} c^{\frac{1}{6}}}\right) : \frac{a^{\frac{1}{3}} c^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{b^{\frac{1}{4}} c^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{5}{6}} c^{\frac{1}{6}}} \cdot \frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} c^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{b^{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}} c^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{5}{6}} c^{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}}} \\ &= \frac{b^{\frac{7}{12}} c^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{5}{6}} c^{\frac{3}{6}}} \\ &= b^{\frac{7-10}{12}} c^{\frac{3-2}{4}} \\ &= b^{-\frac{1}{4}} c^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{c}{b}}\end{aligned}$$

3. x : Anzahl der Lampen, y : Anzahl der Nächte. x und y stehen in einer umgekehrt proportionalen Beziehung, da eine Vergrößerung von x eine Verkleinerung von y zur Folge hat. Also ist

$$x \cdot y = 8 \cdot 11 = 88 \quad \text{bzw.} \quad y = \frac{88}{x}.$$

Bei drei zusätzlichen Lampen ist $x = 11$. Damit reicht die Batterie in diesem Fall für

$$y \text{ Nächte} = \frac{88}{11} \text{ Nächte} = 8 \text{ Nächte}.$$

Oder mit dem Schulrezept:

Behauptungssatz: 8 Lampen brennen 11 Nächte
 Zwischensatz: 1 Lampe brennt 88 Nächte
 Schlussatz: 11 Lampen brennen $\frac{88}{11}$ Nächte = 8 Nächte.

4. Die restlichen drei Teilnehmenden machen 5% des Kurses aus ($100\% - 80\% - 15\%$). Die Gesamtzahl der Teilnehmer beträgt also

$$G = 3 \cdot \frac{100}{5} = 60.$$

Von diesen essen 80%, also $\frac{80}{100} \cdot 60 = 48$, in der Mensa, und $\frac{15}{100} \cdot 60 = 9$ sind Selbstversorger.

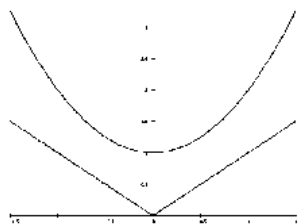
5.

Ausdruck	$\sqrt{\frac{0}{\pi}}$	e^π	0^0	$(-2)^2$	$(-2)^x$	$\log_2(-2)$	$\log_{-2} 2$	$(e^{-2})^{-\frac{1}{2}}$	2^{-x}
definiert	ja	ja	nein	ja	nein	nein	nein	ja	ja

6.

$$\log_3 3 = \ln e = 1, \quad \log_{\frac{1}{e}} 2 = -\ln 2, \quad \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}.$$

7. Beachten Sie: $\sqrt{x^2} = |x|$.



Die Gleichung hat keine Lösung, da die beiden Graphen sich nicht schneiden.

8. Die Gleichung $M_0 e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} M_0$ ist nach T auflösen. M_0 kürzt sich heraus und es bleibt

$$\begin{aligned} e^{-\lambda T} &= \frac{1}{2} \\ e^{-\lambda T} &= 2^{-1} \\ e^{\lambda T} &= 2 \\ \lambda T &= \ln 2. \end{aligned}$$

Es ist $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$.