# Mathematik für Wirtschaftswissenschafter

## Aufgabensammlung zur Vorlesung an der TU Berlin

### Sommersemester 2002

Mattis Neiling

*Vorbemerkung*: Diese Aufgabensammlung umfaßt viele Übungsaufgaben zu den einzelnen Themen, die in der Vorlesung behandelt werden. In den Übungen werden einzelne Aufgaben daraus vorgerechnet und durchgesprochen. Alle weiteren Aufgaben sind zur Vertiefung der Themen im Selbststudium mit in die Sammlung aufgenommen worden.

Die Musterlösungen zu den einzelnen Aufgaben werden —nach Behandlung in den Übungen — online verfügbar gemacht unter: ***http://stat.cs.tu-berlin.de/lehre/mathe/.***

Trotz großer Sorgfalt bei der erstmaligen Zusammenstellung zum Sommersemester 2002 kann es vorkommen, daß in einzelnen Aufgaben Unklarheiten bei der Aufgabenstellung auftreten. Diese und andere Fragen zu den Aufgaben können in den Übungen besprochen werden — neben dem Vorrechnen und Üben ausgewählter Aufgaben.

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Vektorrechnung

Sommersemester 2002

**Aufgabe 1** *(Vergleich von Vektoren)*

Vergleichen Sie den Vektor

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit den folgenden Vektoren $\vec{x}_1$ bis $\vec{x}_{10}$ und geben Sie an, welche der Relationen

$$<, \quad \leq, \quad =, \quad \geq \quad \text{bzw} \quad >$$

erfüllt sind:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_5 = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{x}_6 = \vec{x}_0 + \vec{x}_3, \quad \vec{x}_7 = \vec{x}_0 - \vec{x}_4, \quad \vec{x}_8 = \vec{x}_5 - \vec{x}_3, \quad \vec{x}_9 = 2(\vec{x}_4 - 2\vec{x}_3), \quad \vec{x}_{10} = 2\vec{x}_4 - 4\vec{x}_3$$

**Aufgabe 2** *(Einfache Vektorrechnung)*

1. Berechnen Sie mit Hilfe der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die folgenden Vektorsummen:

(a)

$$3\,\vec{a} - 4\,\vec{b} + \vec{c}$$

(b)

$$3\,\left(5\,\vec{b} + \vec{c}\right) + \left(-\vec{a} + 3\,\vec{b}\right)$$

(c)

$$3\,\left(\vec{a} - 2\,\vec{b}\right) + 5\,\vec{c}$$

2. Bestimmen Sie die Komponenten des Vektors
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$
so, daß
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
gilt.

3. Der Filialleiter eines Supermarktes ordnet jeder Person, die den Supermarkt verläßt, einen Vektor zu, dessen Komponenten die Mengen der von der Person gekauften Waren darstellt.
   (a) Unter welchen Voraussetzungen kann man die erhaltenen Vektoren stets addieren?
   (b) Welche betriebswirtschaftliche Bedeutung hat ein möglicher Summenvektor?
   (c) Welche Bedeutung hat eine reelle Zahl, mit der man einen personenbezogenen Vektor multipliziert?

4. Die Berliner Filiale eines Reiseunternehmens verkauft jährlich 1 000 Inlandsreisen, 10 000 Reisen ins europäische und 5 000 Reisen ins außereuropäische Ausland. Die entsprechenden Verkaufszahlen der Hamburger Filiale betragen: 2 000 Inlandsreisen, 8 000 Europareisen und 3 000 Reisen ins außereuropäische Ausland.
   (a) Tragen Sie die Verkaufszahlen der beiden Filialen in eine übersichtliche Tabelle ein.

| | Berlin | Hamburg |
|---|---|---|
| Inland | 1 000 | 2 000 |
| Europa | 10 000 | 8 000 |
| International | 5 000 | 3 000 |

5. Entnehmen Sie aus der in 4a aufgestellten Tabelle für jede Filiale den Vektor der Verkaufszahlen.
   (a) Berechnen Sie den Vektor, der die Gesamtverkaufszahlen des Reiseunternehmens gegliedert nach Reiseländer angibt.
   (b) Berechnen Sie den Vektor der Gesamtverkaufszahlen des Reiseunternehmens, wenn die Berliner Filiale ihre Verkaufszahlen um 20 Prozent und die Filiale ihre Verkaufszahlen um 15 Prozent erhöht.

## Aufgabe 3 *(Linearkombinationen)*

1. Stellen Sie den Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination der folgenden Vektoren dar:

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1. Gegeben seien die beiden Vektorena

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie den Nullvektor durch zwei verschiedene Linearkombinationen aus den gegebenen Vektoren dar.

(b) Läßt sich der Vektor

$$\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

durch eine Linearkombination aus den Vektoren $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ darstellen?

## Aufgabe 4 *(Lineare Unabhängigkeit)*

1. Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear abhängig?

2. Prüfen Sie folgende Vektoren auf lineare Abhängigkeit.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Prüfen Sie folgende Vektoren auf lineare Unabhängigkeit.

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 5 *(Vektorraumaxiome)*

Zeigen Sie, daß die Menge

$$P = \left\{ a \cdot x^2 + b \cdot x + c \,|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

der Polynome höchstens zweiten Grades zusammen mit den beiden Verknüpfungen

1. Addition:

$$p_1 = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1$$

$$p_2 = a_2 \cdot x^2 + b_2 \cdot x + c_2$$

$$p_1 + p_2 = (a_1 + a_2) \cdot x^2 + (b_1 + b_2) \cdot x + c_1 + c_2$$

2. Multiplikation mit einer reellen Zahl $\lambda$ :

$$\lambda \cdot p = \lambda \cdot a \cdot x^2 + \lambda \cdot b \cdot x + \lambda \cdot c$$

einen Vektorraum bildet.

## Aufgabe 6 *(Skalarprodukt)*

Bestimmen Sie von den folgenden Vektoren das Skalarprodukt:

1. $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$

2. $\vec{a} = (22, 3, 2)^T$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

3. $\vec{c} = (3, 19, 1)^T$ , $\vec{d} = (-5, 4, -6)^T$

4. $\vec{e} = (4, 2, 16)^T$, $\vec{f} = (-5, -4, 6)^T$
5. $\vec{a} = (5, 5, 5, 5)^T$, $\vec{b} = (1, -1, 1, -1)^T$

## Aufgabe 7 *(Geometrische Darstellung)*

Geben Sie jeweils eine geometrische Beschreibung (Skizze) der Punktmengen in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) sowie die Lösungsmenge $L$ an , die durch folgende Linearkombinationen bestimmt sind:

1. $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_j \in \mathbb{R};\ \lambda_j \geq 0;\ j = 1, 2$
2. $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_j \in \mathbb{R};\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1$
3. $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_j \in \mathbb{R};\ j = 1, 2$
4. $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_j \in \mathbb{R};\ 0 \leq \lambda_j \leq 1;\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$

## Aufgabe 8 *(Vektorraum $\mathbb{R}^n$ )*

Gegeben sei die Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|u_1 \cdot u_2 = 0 \right\} .$$

Geben Sie vier verschiedene Vektoren aus der Menge $U$ sowie eine geometrische Beschreibung (Skizze) der Punktmenge in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) an!

## Aufgabe 9 *(Norm und Winkel)*

1. Seien $\vec{v}, \vec{w} \in V$ Vektoren. Zeigen Sie, daß folgende Relation gilt (Satz des Pythagoras):

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\,\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

2. Bestimmen Sie für die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, und $\vec{c}$ aus Aufgabe 2.1 jeweils paarweise die Winkel zwischen den Vektoren.

## Aufgabe 10 *(Lineare Unabhängigkeit und Orthogonalität)*

1. Sind die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

2. Sind $\vec{x}$ und $\vec{y}$ orthogonal? Wenn nicht, welchen Winkel schließen die beiden Vektoren ein?
3. Geben Sie zu $\vec{x}$ einen orthogonalen (Nichtnull-) vektor an und zu diesem einen dritten Vektor, so daß sie eine Basis im $\mathbb{R}^3$ erhalten.

**Aufgabe 11** *(Basisergänzung)*

Geben Sie alle Vektoren der Form $(0, a, b, 0)^t$ an, die das Vektorsystem

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ ergänzen.

**Aufgabe 12** *(Basissystem)*

Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden!

1.
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

3.
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.
$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 13** *(Basis)*

Stellen Sie eine Basis auf, ausgehend von den gegebenen Vektoren. Um eine orthogonale Basis aufzustellen (empfohlen), nutzen Sie das Skalarprodukt!

1. Im $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 14** *(Basissysteme)*

1. Im $\mathbb{R}^3$ seien folgende vier Vektoren gegeben

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Welche drei Vektoren spannen den gesamten $\mathbb{R}^3$ auf? Welcher Vektor läßt sich nicht durch die anderen Vektoren linear kombinieren?

2. Wie muß folgende Menge von Vektoren ergänzt werden, um eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$ zu erhalten?

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ 2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{9} \\ -\frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 15** *(Basis)*

Handelt es sich bei den folgenden Mengen von Vektoren jeweils um eine Basis $R^3$:

1.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} I: \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ II: \quad 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ III: \quad 2\lambda_1 + 6\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} aus\,I\,folgt\,IV:\ \lambda_1 &= -2\lambda_2 - \lambda_3 \\ aus\,II\,folgt\,V:\ \lambda_1 &= -\frac{4}{3}\lambda_2 - \frac{1}{3}\lambda_3 \end{aligned}$$

$$und\,durch\,Gleichsetzung\,folgt\,VI: \quad -\frac{2}{3}\lambda_3 = \frac{2}{3}\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = -\lambda_3$$

$$Einsetzung\,von\,VI\,in\,IV: \quad \lambda_1 = \lambda_3$$

$$fuer\,III\,folgt: \quad 2\lambda_3 + 6(-\lambda_3) + \lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -3\lambda_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

3.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = 2 * (\vec{a} + \vec{b})$$

1.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 16 *(Linearkombination von Vektoren)*

Gegeben seien folgende Vektoren in $R^3$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Stellen Sie den Vektor $\vec{d}$ als Linearkombination dar.
2. Ist es möglich den Vektor $\overrightarrow{a}$ als eine Linearkombination der gegebenen Vektoren darzustellen?
3. Sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{d}$ linear unabhängig?

**Aufgabe 17** *(Linearkombination von Vektoren)*

Gegeben seien folgende Vektoren des $R^2$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1, -1 \end{pmatrix}^T$ , $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1, & 2 \end{pmatrix}^T$ mit der Linearkombination $\lambda_1 * \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{c}$, wobei $\lambda_1, \lambda_2 \epsilon R$ und $\vec{c} \epsilon R^2$.

1. Welche Eigenschaften müssen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ besitzen, damit diese Beziehung gilt (überprüfen).
2. Stellen Sie den Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6, & 0 \end{pmatrix}^T$ graphisch und als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.

**Aufgabe 18** *(Lineare Unabhängigkeit)*

Wie soll der Parameter $t \epsilon R$ gewählt werden, damit die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ Basis in $R^3$ bilden?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 19** *(-gestrichen -)*

**Aufgabe 20** *(Basis)*

Die Menge

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

bildet eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Welchen Vektor aus der Menge $B$, darf man nicht gegen den Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

austauschen, da sonst die Menge $B$ ihre Basiseigenschaft verliert?

**Aufgabe 21** *(Vektorraum)*

Zeigen Sie, daß die Menge aller differenzierbaren Funktionen mit geeigneten Definitionen der Mengenoperationen Addition und Multiplikation mit einem Skalar einen Vektorraum bildet.

**Aufgabe 22** *(Vektorraum)*

1. Zeigen Sie, daß die Lösungen der linearen Abbildung

$$f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}, \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

einen Vektorraum bilden.

(a) Wenn $\vec{x}, \vec{y} \in V$ dann gilt auch $\vec{x} + \vec{y} \in V$.

(b) Für alle reellen Zahlen$\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{x} \in V$ gilt $\lambda \vec{x} \in V$.

Die Gültigkeit dieser Axiome kann gezeigt werden:

(a) Addition: sei $A\vec{x} \in V$, $A\vec{y} \in V$ , so soll auch $A\vec{x} + A\vec{y} \in V$ sein.

$$A\vec{x} + A\vec{y} \quad = A(\vec{x} + \vec{y}) \in V$$

Dies ist eine wahre Aussage, da $\vec{x} + \vec{y}$ für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ wohl definiert ist. (Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ als Vektorraum mit der bekannten Addition von Vektoren.)

(b) Multiplikation: sei $A\vec{x} \in V$, so muß auch $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda A\vec{x} \in V$ sein.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \quad \lambda A\vec{x} = A(\lambda \vec{x}) \in V\,.$$

Begründung analog oben.

2. Welche Dimension kann der Vektorraum aus Teil 1. haben? Geben Sie für $m = 3$ und $n = 2$ lineare Abbildungen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ an, die in Vektorräumen unterschiedlicher Dimension der Lösungen resultieren.

# 2 Matrizenrechnung

### Aufgabe 23 *(Rechnen mit Matrizen I)*

1. Sei $A$ eine $(3 \times 4)$ Matrix und $B$ eine $(4 \times 5)$ M atrix. Wieviele Spalten und Zeilen hat dann die Matrix $C$, die sich durch deren Addition ergeben soll?
2. Sei $A$ eine $(7 \times 8)$ Matrix und $B$ eine $(8 \times 11)$ Matrix. Wieviele Spalten und Zeilen hat dann die Matrix $C$ aus deren Multiplikation?

### Aufgabe 24 *(Rechnen mit Matrizen II)*

Die Multiplikation zweier Matrizen ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} C &:= A \cdot B \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum a_{1i} b_{i1} & \dots & \sum a_{1i} b_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum a_{mi} b_{i1} & \dots & \sum a_{mi} b_{ip} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Bestimmen Sie folgende Matrixprodukte!

1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 25** *(Rechnen mit Matrizen III )*

Folgende Matrizen seien gegeben:

$$A^T = (1,3,5),\ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie folgende Matrizenmultiplikationen durch, sofern sie definitionsgemäß möglich sind.

1. $A^TB$ 2. $BA^T$ 3. $A^TC$ 4. $BC$
5. $CB$ 6. $CD$ 7. $DC$

**Aufgabe 26** *(Rechnen mit Matrizen IV)*

Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_{ij}$ und $b_{ij}$, so daß die Matrixmultiplikation erfüllt ist!

1.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & -10 & -4 \\ 0 & 20 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 27** *(Rechnen mit Matrizen V)*

Gegeben seien folgende Matrizen:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Führen Sie folgende Matrizenmultiplikationen aus, falls möglich und vergleichen Sie die Ergebnisse miteinander:

1. $A^T * B^T$
2. $B^T * A^T$
3. $A * B$
4. $B * A$

**Aufgabe 28** *(Rechnen mit Matrizen VI)*

Gegeben seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 3}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie folgende Ausdrücke:

| | | |
|---|---|---|
| 1. $\lambda A^T$ | 2. $AB$ | 3. $BA$ |
| 4. $A^T B^T$ | 5. $B\vec{x}$ | 6. $A^T\vec{x}$ |

**Aufgabe 29** *(Transponieren einer Matrix)*

Beweisen Sie folgenden Satz: *Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Dann gilt*

$$(AB)^T = B^T A^T .$$

Hinweis: Berechnen Sie explizit das $i, j$–te Element der resultierenden Matrizen!

**Aufgabe 30** *(Rang einer Matrix)*

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 2 \\ 1 & -2 & -6 \\ 0 & \frac{6}{18} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} .$$

**Aufgabe 31** *(Kommutativität der Matrixmultiplikation)*

Für welche Matrizen gilt generell die Kommutativität der Matrixmultiplikation?

**Aufgabe 32** *(Matrizenrechnung / Anwendungsaufgaben)*

Ein Schreibwarenunternehmen hat drei simultan betriebsfähige Produktionsstraßen $P_1$, $P_2$ und $P_3$. In $P_1$ werden pro Zeiteinheit (ZE) 10 DIN A4– und 2 DIN A3–Helfe produziert. $P_2$ schafft in einer ZE 5 DIN A5– und 10 DIN A4–Hefte. $P_3$ produziert pro ZE 10 DIN A5–, 30 DIN A4– und 2 DIN A3–Hefte. Nun kommt ein Auftrag an, der 500 DIN A5–, 1500 DIN A4– und 200 DIN A3–Helfte vorsieht, und zeitlich keiner Beschränkung unterliegt.

Kann das Unternehmen den Auftrag erfüllen, ohne Überschuß zu produzieren?

## Aufgabe 33 *(Lineare Abbildungen I)*

Berechnen Sie folgende Hintereinanderschaltung linearer Abbildungen! Nehmen Sie dabei immer die Darstellung der Vektorraumelemente bezüglich der kanonische Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ an.

1. Sei die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Matrixrepräsentation
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$
und die lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Wie sieht die Matrixrepräsentation der linearen Abbildung $\Pi(\vec{x}) = \phi(\psi(\vec{x}))$ aus?

2. Sei die lineare Abbildung $\gamma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch
$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{2}{6} & \frac{3}{15} \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ 3 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$
und die lineare Abbildung $\delta : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch
$$D = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -12 & 25 \\ 6 & 12 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie die Matrix $E$, die die Abbildung $\varepsilon(\vec{x}) := \delta(\gamma(\vec{x}))$ darstellt!

## Aufgabe 34 *(Lineare Abbildungen II)*

1. Durch welche der vier Matrizen ist die folgende lineare Abbildung repräsentiert (als Basis ist die kanonische Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ gegeben)?
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}.$$

| a) | b) | c) | d) |
|---|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ |

2. Gegeben sei die folgende lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ repräsentiert duch, bezüglich der kanonischen Basis,
$$D = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \ \theta \in [0, 2\pi].$$

(a) Welche Abbildung ist dadurch definiert? Veranschaulichen Sie sich diese Abbildung anhand einer Graphik, in die Sie die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und deren Bilder unter $\phi(X)$ für ein $\theta \in [0, 2\pi]$ (z.B. $\theta = 90°$) einzeichnen!

(b) Welche Abbildung $\psi$ ist folglich durch

$$D^{\dagger} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

definiert?

(c) Welche Abbildung ergibt sich durch die Hintereinanderschaltung von $\psi$ und $\phi$ für festes $\theta$?

## Aufgabe 35 *(Lineare Abbildungen III)*

Gegeben sind die beiden Matrizen $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Weisen Sie nach, daß $AB = BA$ gilt, indem Sie explizit $AB$ und $BA$ berechnen!
2. Mit welcher speziellen Rotationsmatrix $R(\alpha)$ ist die Operation $AB$ identisch? Die Rotationsmatrix $R(\alpha)$ ist allgemein definiert durch

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Aufgabe 36 *(Lineare Abbildungen IV / Klausuraufgabe)*

Gegeben ist die unbekannte lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned} \phi\left((1,1,1)^T\right) &= (3,8,4)^T, \\ \phi\left((1,2,0)^T\right) &= (5,11,8)^T, \\ \phi\left((0,1,3)^T\right) &= (2,7,8)^T. \end{aligned}$$

Wie lautet diese lineare Abbildung allgemein, d.h. für beliebige Vektoren $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$?

## Aufgabe 37 *(Lineare Abbildungen V)*

1. Bestimmen Sie die Matrix $A$, welche die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_3 + 9 \cdot x_4 \\ x_1 + 3 \cdot x_2 - 7 \cdot x_3 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 + 5 \cdot x_4 \end{pmatrix},$$

bezüglich der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^4$ und des $\mathbb{R}^3$ repräsentiert!

2. Bestimmen Sie eine Basis der Wertemenge der in 1. definierten linearen Abbildung $f$!

**Aufgabe 38** *(Lineare Abbildungen / Verständnisaufgaben I)*

Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Sei $\left\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

1. Zeigen Sie, daß alle $L(\vec{v})$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ von $\left\{L\left(\vec{b}_1\right), ..., L\left(\vec{b}_n\right)\right\}$ erzeugt werden können.
2. Zeigen Sie dies auch mit Hilfe des folgenden Beispiels für $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^n$.

**Aufgabe 39** *(Lineare Abbildungen / Verständnisaufgaben II)*

Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen wahr und falsch sind :

1. Die Dimension eines Vektorraumes entspricht der Anzahl von Basisvektoren und ist damit von der gewählten Basis abhängig.
2. Eine Diagonalmatrix ist immer auch eine obere und eine untere Dreiecksmatrix.
3. Für jede lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert eine $(m \times n)$ Matrix $A$, so daß
$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \qquad \phi(\vec{x}) = A\vec{x}.$$
4. Es gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}$
$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} : \qquad \det(A + B) = \det(A) + \det(B) .$$
5. $\det(A) \neq 0$ ist keine notwendige Bedingung für die Existenz der Inversen von $A$, sondern nur eine hinreichende Bedingung.

**Aufgabe 40** *(Lineare Abbildungen / Anwendungsaufgabe)*

Eine Bank soll fit für den Euro gemacht werden. Zur Zeit bekommt jeder Kunde dieser Bank einen zweidimensionalen Vektor zugewiesen, wobei die erste und die zweite Komponenten dieses Vektors die Zustände in DM des Girokontos bzw. des Sparkontos dieses Kunden beschreiben (wenn ein Kunde irgendein von den beiden Kontos nicht besitzt, bekommt er in der entsprechenden Komponente 0 zugewiesen.) Jeder Kundenvektor soll nun um zwei neue Komponenten erweitert werden: um die Gesamtsumme der Beträge in DM und um die Gesamtesumme in Euro. Mathematisch gesehen entspricht dies also einer Abbildung $EK$ (Euro kommt) für die gilt:

$$EK : \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \\ (x_1 + x_2) \cdot 0.5 \end{pmatrix}$$

1. Zeigen Sie nun, daß diese Abbildung linear ist !
2. Geben Sie die Matrix dieser linearen Abbildung an!

**Aufgabe 41** *(***Beweisarten / vollständige Induktion / Matrizen)*

Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, daß folgende Beziehung für alle n$\in N$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{1}{2}n(n+1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# 3 Lineare Abbildungen und Gleichungssysteme

**Aufgabe 42** *(Gauß-Algorithmus)*

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Algorithmus!

1.
$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 20 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 18 \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 28 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 20 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 18 \\ 8x_1 + x_2 + 3x_3 &= 24 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 20 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 18 \\ 8x_1 + x_2 + 3x_3 &= 22 \end{aligned}$$

**Aufgabe 43** *(Lösbarkeit von Gleichungssystemen)*

Überprüfen Sie die folgenden Gleichungssysteme hinsichtlich ihrer Lösbarkeit:

1.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 8 \\ 5x - 3y &= 2 \\ -10x + 6y &= 4 \\ 3x + \frac{3}{5}y &= \frac{8}{5} \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 9 \\ -2x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 8x_4 &= -2 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= -1 \end{aligned}$$

**Aufgabe 44** *(Lineare Gleichungssysteme I)*

Geben Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungsystems an:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 3\,, \\ -9x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 12\,, \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 &= 2\,. \end{aligned}$$

**Aufgabe 45** *(Lineare Gleichungssysteme II)*

Die folgenden linearen Gleichungssysteme haben genau eine Lösung. Bestimmen Sie die jeweiligen Lösungen mit Hilfe des Gauß'schen Lösungsalgorithmus! Geben Sie die jeweilige Lösung in Form eines Vektors an!

1.

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 5\,, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 2\,, \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 5\,. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 + x_3 &= -1\,, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3\,, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2\,. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} -x_2 - 4x_3 &= 1\,, \\ -x_1 - x_3 &= -2\,, \\ -4x_1 + x_2 + x_3 &= -4\,. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -2\,, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0\,, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= -1\,. \end{aligned}$$

5. Bei der Berechnung der Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems runden Sie bitte ihre Zwischenergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma! Setzen Sie ihre Lösung ins Gleichungssystem ein und berechnen Sie die Differenz zwischen ihrer rechten Gleichungsseite und der gegebenen.

$$\begin{aligned} 1.3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0.54\,, \\ 0.85x_1 + 1.2x_2 + 2.02x_3 &= 0.146\,, \\ 1.1x_1 + 0.455x_2 + 0.2x_3 &= 0.013\,. \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -2\,, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 3\,, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 3\,, \\ -2x_1 - x_3 + 2x_4 &= -1\,. \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 - 2x_4 &= -2\,, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 &= -2\,, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 1\,, \\ 2x_3 + 2x_4 &= 1\,. \end{aligned}$$

## Aufgabe 46 *(Lösbarkeit von Gleichungssystemen)*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Gleichungssysteme lösbar sind, wenn ja, geben Sie auch die Dimension des Lösungsraumes an!
Treffen Sie weiterhin eine Aussage hinsichtlich der Determinante der Koeffizientenmatrix.
Hinweis: Die Gleichungssysteme sind in Matrizenschreibweise gegeben (erweiterte Koeffizientenmatrix), wobei $x \in \{\mathbb{R} \setminus 0\}$.

1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{array}\right)$$

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & x & x & x \\ 0 & x & 0 & x \\ 0 & 0 & x & x \end{array}\right)$$

3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

## Aufgabe 47 *(Lineares Gleichungssystem)*

Ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar? Wenn JA, geben Sie die Lösung an.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 48** *(Lineares Gleichungssystem)*

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das folgende lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar? Geben Sie die Lösung für $\vec{x}$ in Abhängigkeit von t an.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 49** *(Anwendungsaufgabe zum LGS I)*

Der Ökonomie-Student Paul finanziert sein Studium durch eine kleine Landwirtschaft. Er war heute auf dem Viehmarkt und hat Zigen zu je 200,- DM, Kühe zu je 1.000,- DM und Enten zu je 30,- DM gekauft. Insgesamt hat er 3.600,- DM ausgegeben und zehnmal soviel Enten wie Kühe gekauft. Auf dem Nachhauseweg hat er 68 Beine bei seinen Tieren gezählt.

Wieviel Enten, Ziegen und Kühe hat er gekauft ?

**Aufgabe 50** *(Anwendungsaufgabe zum LGS II)*

In einer Abteilung einer Eisfabrik werden ausschließlich die drei Eissorten Nogger, Cornetto und Taco hergestellt. Für die Zubereitung benötigt man folgende Zutaten (Mengen in Gramm):

| | Nogger | Cornetto | Taco |
|---|---|---|---|
| Schokolade | 20 | 15 | 25 |
| Nüsse | 10 | 15 | 20 |
| Vanille | 6 | 8 | 10 |

In einer Stunde werden 7300 g Schokolade, 5300 g Nüsse und 2860 g Vanille zu Eis verarbeitet.

1. Berechnen Sie mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems die Stückzahlen der drei Eissorten, die in einer Stunde produziert werden.
2. Wieviele Nogger, Cornettos und Tacos werden an einem Tag produziert, wenn die Maschinen 15 Stunden in Betrieb sind? Welche Mengen an Zutaten werden an einem Tag verarbeitet?
3. Die Produktion wird hochgefahren, so daß in einer Stunde 300 Nogger, 250 Cornettos und 200 Tacos produziert werden. Berechnen Sie die Mengen an Zutaten, die jetzt pro Stunde benötigt werden.
4. Die Sort Taco wird aus dem Sortiment gestrichen. Zur besseren Auslastung der Maschinen werden jetzt folgende Mengen an Zutaten verarbeitet: 5800 g Schokolade, 5300 g Nüsse, 2860 g Vanille. Erstellen Sie ein neues lineares Gleichungssystem, um die Stückzahlen der verbliebenen Eissorten zu berechnen.

**Aufgabe 51** *(Anwendungsaufgabe zum LGS III -lineare Produktionsplanung)*

1. Für die Produktion von 2 Endprodukten $P_1$ und $P_2$ über 3 Zwischenprodukte $Z_1$, $Z_2$ und $Z_3$ aus 4 Rohstoffen $R_1$, $R_2$, $R_3$ und $R_4$ seien folgende Direktbedarfsmatrizen gegeben:
   Rohstoffe in Zwischenprodukte:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$
   Rohstoffe in Endprodukte:
   $$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^T$$
   Berechnen Sie die Direktbedarfsmatrix für die Produktion der Endprodukte aus den Zwischenprodukten.

2. Aus drei Zementsorten $Z_1$, $Z_2$ und $Z_3$ sowie zwei Kiessorten $K_{fein}$ und $K_{grob}$ werden drei Sorten Trockenmörtel $T_1$, $T_2$ und $T_3$ in folgenden Mischungsverhältnissen ($Z_1 : Z_2 : Z_3 : K_{fein} : K_{grob}$), bezogen auf Volumeneinheiten, hergestellt:

   | | |
   |---|---|
   | Mischungsverhältnis für $T_1$: | (0,5 : 0,5 : 0 : 6 : 0) |
   | Mischungsverhältnis für $T_2$: | (1 : 0,5 : 0,5 : 5 : 3) |
   | Mischungsverhältnis für $T_3$: | (0 : 0,5 : 2,5 : 3 : 6) |

   Geben Sie die Direktbedarfsmatrix des Mischungsprozesses an (die pro Einheit der Mörtelsorten benötigten Einheiten der Bestandteile).

## **Aufgabe 52** *(LGS / Cramersche-Regel I)*

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 4x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 &= 5 \end{aligned}$$

1. Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem in Matrizenschreibweise!

2. Löse das lineare Gleichungssystem nach der Cramerschen Regel (Ergebnisse haben große Brüche!).

3. Welche Bedingung muß erfüllt sein, damit man ein lineares Gleichungssystem nach der Cramerschen Regel lösen kann?

**Aufgabe 53** *(LGS / Cramersche-Regel II)*

Gegeben sei folgendes lineare Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix!
2. Entscheiden Sie, ob das LGS mit der Cramerschen Regel zu lösen ist!
3. Bestimmen Sie die Dimension des Lösungsraumes!
4. Geben Sie folgende Lösungen an:
   (a) Allgemeine Lösung des homogenen Systems
   (b) Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems
   (c) Eine Spezielle Lösung des inhomogenen Systems

**Aufgabe 54** *(Cramersche Regel III)*

Verwenden Sie die Cramersche Regel um folgendes Gleichungssystem zu Lösen!

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= -6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 19 \end{aligned}$$

**Aufgabe 55** *(LGS / Cramersche-Regel VI)*

Gegeben sei folgendes lineare Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 5x_3 &= 5 \end{aligned}$$

1. Bestimmen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix!
2. Entscheiden Sie, ob das LGS mit der Cramerschen Regel zu lösen ist!
3. Bestimmen Sie die Dimension des Lösungsraumes!
4. Geben Sie folgende Lösungen an:
   (a) Allgemeine Lösung des homogenen Systems
   (b) Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems
   (c) Eine Spezielle Lösung des inhomogenen Systems

## Aufgabe 56 *(LGS / Verständnisfragen I)*

Gegeben sei des lineare Gleichungssystem $AX = B \qquad (B \neq 0)$, wobei $A$ eine $(n \times n)$-Matrix ist. Geben Sie an, ob folgende Aussgaen richtig oder falsch sind. (Ohne Begründung)

1. Das System ist immer lösbar.
2. Das System ist nur lösbar, wenn $det\, A \neq 0$.
3. Das System ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $det\, A \neq 0$.
4. Das homogene Gleichungssystem ist immer lösbar.
5. Wenn das System lösbar ist, hat $A$ den Rang $n$.
6. Wenn das System lösbar ist, kann man es mit der Cramerschen Regl lösen.
7. Die Lösungen des Gleichungssystems bilden einen Vektorraum.
8. Die Lösungen des homogenen Gleichungssystems bilden einen Vektorraum.
9. Das System ist genau dann lösbar, wenn $B$ eine Linearkobination der Spaltenvektoren von $A$ ist.
10. Wenn das System eindeutig lösbar ist, existiert die inverse Matrix von $A$.

## Aufgabe 57 *(LGS / Verständnisfragen II )*

1. Ist ein LGS mit weniger Gleichungen als Unbekannten stets lösbar? (Wenn nicht, geben Sie ein Beispiel an.)
2. Kann ein lineares Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten im Falle der Lösbarkeit eine eindeutig bestimmte Lösung besitzen? (Wenn ja, geben Sie ein Beispiel an.)
3. Wann hat ein LGS nur endlich viele Lösungen?
4. Lösen Sie das folgende LGS und geben Sie die Bedingungen an die rechte Seite an, unter denen es lösbar bzw. nicht lösbar ist an. Wieviele Lösungen gibt es im Falle der Lösbarkeit?

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & b_1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & b_2 \\ x_1 & + & x_3 & = & b_3 & & \end{array}$$

## Aufgabe 58 *(*** Kurvenbestimmung)*

Zeigen Sie, daß die Aufgabe **Bestimmung einer quadratischen Funktion aus drei Kurvenpunkten** sich als Lösung aus einem linearen Gleichungssystem ergeben kann.

1. Bestimmen Sie die quadratische Funktion für den speziellen Fall:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 1 \\ f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 \end{aligned}$$

2. Das Wachstum einer Geldanlage mit einem Anfangskapitalwert $K_0$ im Verlaufe von zwei Jahren werde durch eine vom Zinssatz $p$ abhängende quadratische Funktion $f(p) = K_0(a_0 + a_1 p + a_2 p^2)$ beschrieben.
   Berechnen Sie die unbekannten Koeffizienten $a_0$, $a_1$ und $a_2$ aus folgenden Angaben:

$$\begin{aligned} f(p = 0) &= K_0 \\ f(p = 5\%) &= 1,1025K_0 \\ f(p = 10\%) &= 1,21K_0 \end{aligned}$$

   Interpretieren Sie das Ergebnis.

3. Wie muß der Ansatz für die Suche nach einem Polynom n-ten Grades aussehen und wieviele Kurvenpunkte benötigen wir für seine Bestimmung?

# 4 Inverse und Determinante

**Aufgabe 59** *(Inverse einer Matrix I)*

Bestimmen Sie von folgenden Matrizen die Inverse. Benutzen Sie hierzu das Gauß'sche Verfahren.

1. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $$B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -7 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. $$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 60** *(Inverse einer Matrix II)*

Berechnen Sie die Inverse zu folgenden Matrizen:

1. $$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 61** *(Inverse einer Matrix III)*

1. Bestimmen Sie, für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ die reelle Matrix

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

   invertierbar ist.

   Hinweis: Bedenken Sie die verschiedenen Möglichkeiten der Überprüfung unabhängig von Aufgabenteil 2) .

2. Berechnen Sie für diese $\lambda$ die inverse Matrix $A_\lambda^{-1}$ .

   Hinweis: Bestimmen Sie die Inverse allgemein für alle $\lambda$.

**Aufgabe 62** *(Inverse einer Matrix IV / Klausuraufgabe)*

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ 0 & i & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}$ wobei $i$ eine reelle Zahl ist.

1. Für welche $i$ existiert die zu $A$ inverse Matrix $A^{-1}$?
2. Welches Ergebnis erwarten Sie bei einer Rangbetrachtung der Matrix $A$ mit $i = 1$? (Begründung)
3. Invertieren Sie die Matrix $A$ für $i = 2$ und zeigen Sie, daß es wirklich die inverse Matrix ist.
4. Berechnen Sie für $i = 2$ jeweils die euklidische Norm der ersten beiden Spaltenvektoren von $A$ und zeigen Sie, daß für diese die Dreiecksungleichung gilt.

**Aufgabe 63** *(Determinante einer Matrix I)*

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

1. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. $$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

3. $$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Berechnen Sie von den beiden folgenden $(3 \times 3)$ Matrizen die Determinante. Anschließend führen Sie bitte die Multiplikation $A \cdot B$ durch und berechnen erneut die Determinante. Was stellen Sie dabei fest?

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Zeigen Sie, daß der Laplacsche Entwicklungssatz für 2x2-Matrizen zu der in der Vorlesung geometrisch entwickelten Formel ($det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$) für die entsprechende Determinante führt.

Zeigen Sie, daß die Determinante einer Dreiecksmatrix gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente ist.
Warum ist eine Dreiecksmatrix genau dann invertierbar, wenn alle ihre Hauptdiagonalelemente ungleich Null sind?

## Aufgabe 64 *(Determinante einer Matrix II)*

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $det\,(A - \lambda E) = 0$?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & -7 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 65 *(Determinante einer Matrix III)*

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 14 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

## Aufgabe 66 *(Inverse und Determinate einer Matrix / Klausuraufgabe)*

1. Bestimmen Sie die Inversen von A und B.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Berechnen Sie die Determinaten von A, B und C.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 67 *(Determinate / Gauß'scher Algorithmus I )*

Wir betrachten folgendes Gauß'sches Rechentableau:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\vec{b}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 0 | 4 | 2 | 2 | |
| (2) | 4 | 0 | 1 | 7 | |
| (3) | 1 | 2 | 0 | 4 | |
| (4) | 1 | 2 | 0 | 4 | (3) |
| (5) | 0 | $-8$ | 1 | $-9$ | (2) $-4\cdot$ (4) |
| (6) | 0 | 4 | 2 | 2 | (1) |
| (7) | 1 | 2 | 0 | 4 | (4) |
| (8) | 0 | 1 | $-\frac{1}{8}$ | $\frac{9}{8}$ | $-\frac{1}{8}\cdot$(5) |
| (9) | 0 | 0 | $\frac{5}{2}$ | $-\frac{5}{2}$ | (6)$-4\cdot$(8) |
| (10) | 1 | 2 | 0 | 4 | (7) |
| (11) | 0 | 1 | $-\frac{1}{8}$ | $\frac{9}{8}$ | (8) |
| (12) | 0 | 0 | 1 | $-1$ | $\frac{2}{5}\cdot$(9) |
| (13) | 1 | 2 | 0 | 4 | (10) |
| (14) | 0 | 1 | 0 | 1 | (11) $+\frac{1}{8}\cdot$(15) |
| (15) | 0 | 0 | 1 | $-1$ | (12) |
| (16) | 1 | 0 | 0 | 2 | (13)$-2\cdot$(17) |
| (17) | 0 | 1 | 0 | 1 | (14) |
| (18) | 0 | 0 | 1 | $-1$ | (15) |

1. Stellen Sie das Tableau als Matrixoperationen da. Benutzen Sie dazu die Matrixdarstellung von LGS

$$(1)\,,(2)\,,(3)\;\Leftrightarrow\; A\vec{x}=\vec{b}$$

und multiplizieren für jeden Umformungsschritt auf beiden Seiten die passende Matrix von links

$$(4)\,,(5)\,,(6)\;\Leftrightarrow\; U_1A\vec{x}=U_1\vec{b}\,.$$

Sie erhalten also fünf Umformungsmatrizen $U_1,\cdots,U_5$.

2. Berechnen Sie mit Hilfe der Umformungsmatrizen die Determinante der Matrix $A$. Benutzen Sie dabei die Definition der Determinante und die Eigenschaften aus Satz 80.

## Aufgabe 68 *(Determinate / Gauß'scher Algorithmus II)*

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix $A$ indem Sie die Matrix $A$ in eine obere Dreiecksmatrix umformen. Notieren Sie sich dabei auch die Umformungsmatrizen.

$$A=\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

# 5 Lineare Programmierung

**Aufgabe 69** *(Lineare Programmierung / Graphische Lösung)*

Lösen Sie die folgenden LP – Probleme graphisch:

1. Maximiere $z$ , mit $z = 28x_1 - 7x_2$ unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} x_2 &\leq 9 \\ 15x_1 - 5x_2 &\leq 90 \\ -3x_1 + 3x_2 &\geq -6 \\ 5x_1 + 10x_2 &\geq 50 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. Minimiere $z$ , mit $z = 9x_1 + 8x_2$ unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &\leq 18 \\ 27x_1 - 9x_2 &\geq 27 \\ x_1 &\geq 6 \\ -2x_1 + 3x_2 &\geq 21 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

3. Maximiere $z$ , mit $z = 6x_1 + 9x_2$ unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} x_{1+2}x_2 &\geq 10 \\ -3x_1 + 7x_2 &\geq 1 \\ -x_1 + 3x_2 &= 42 \\ -4x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

4. Maximiere $z$ , mit $z = 9x_1 + 12x_2$ unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq 180 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 160 \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 240 \\ x_2 &\leq 35 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

5. Geben Sie graphisch ein Optimierungsproblem an, welches keine Lösung besitzt.

**Aufgabe 70** *(Lineare Programmierung / Maximierungsaufgaben I)*

Ein Bekleidungsfachgeschäft führt neben Kleidung auch Accessoires, wie Gürtel und Modeschmuck.

Der Gewinn liegt für Kleidung bei 30 % des Verkaufpreises. Für Accessoires liegt dagegen der Gewinn bei 50% des Verkaufpreises.

Für die nächste Saison läßt sich gemäß der bisherigen Erfahrungen höchstens 500.000 EUR Umsatz erzielen.

Der Inhaber des Geschäftes verfügt über Lagerkapazitäten für Kleidung in Wert von 400.000 EUR. Da es sich um ein Bekleidungsfachgeschäft handelt, ist ihm bewußt, daß der Anteil der Accessoires wertmäßig $\frac{1}{4}$ seines Angebotes an Bekleidung nicht überschreiten darf.

Wie soll der Inhaber die Bestellung auf Bekleidung und Accessoires aufteilen, damit sein Gewinn maximal wird?

1. Formulieren Sie das LP–Problem in der Standardform.
2. Lösen Sie das Optimierungsproblem graphisch und geben Sie die optimale Lösung an!
3. Was geschieht mit der gefundenen optimalen Lösung, wenn die Lagerkapazität für Bekleidung auf 500.000 EUR ausgedehnt werden kann? (Begründung mit Hilfe der Grafik ausreichend).
4. Wie hoch sind die Ausgaben des Geschäftinhabers, wenn die Bestellung gemäß der optimalen Lösung ausgeführt wird und wie hoch ist der Gewinn in Prozent?

## Aufgabe 71 *(Lineare Programmierung / Maximierungsaufgaben II)*

Es sei folgendes lineares Optimierungsproblem gegeben:
maximiere

$$f(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 3 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Lösen Sie dieses Optimierungsproblem graphisch und geben Sie die optimale Lösung an.
2. Lösen Sie dieses Optimierungsproblem mit Hilfe des Simplex-Algorithmus.
3. Was geschieht, wenn die vierte Nebenbedingung ($-x_1 + 2x_2 \leq 8$) durch folgende Restriktion ersetzt wird: $-x_1 + x_2 \leq 8$ ? (Begründung mit Hilfe der Grafik ausreichend).
4. Was geschieht, wenn die vierte Nebenbedingung ($-x_1 + 2x_2 \leq 8$) durch folgende Restriktion ersetzt wird: $-x_1 + 2x_2 \leq 3.5$ ? (Begründung mit Hilfe der Grafik ausreichend).

## Aufgabe 72 *(Lineare Programmierung / Maximierungsaufgaben III)*

Gegeben sei folgende Zielfunktion

$$z(x_1, x_2) = 8 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 .$$

Gesucht ist das Maximum von $z$ unter den Restriktionen

$$\begin{aligned} 30 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 &\leq 2400\,, \\ x_1 &\leq 50\,, \\ x_2 &\leq 100\,, \end{aligned}$$

und den Nichtnegativitätsbedingungen

$$x_1, x_2 \geq 0\,.$$

1. Lösen Sie das Optimierungsproblem graphisch.
2. Lösen Sie das Problem mit Hilfe des Simplex-Verfahrens und geben Sie die Lösung an.

**Aufgabe 73** *(Lineare Programmierung / Maximierungsaufgaben IV)*

Lösen Sie folgendes LP-Problem:
Zielfunktion

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 \quad = g \Rightarrow \quad \max!\,,$$

Restriktionen

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 &\leq 100 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\leq 80\,, \end{aligned}$$

und den Nichtnegativitätsbedingungen

$$x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5 \geq 0\,.$$

**Aufgabe 74** *(Lineare Programmierung / Maximierungsaufgaben V)*

Lösen Sie folgendes lineares Programm:

$$\text{maximiere} \qquad 5x_1 + 2x_2$$

untern den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq -1\,, \\ 2x_1 + x_2 &\geq 4\,, \\ x_2 &\geq 1\,, \\ x_1 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

**Aufgabe 75** *(Lineare Programmierung / Maximierungsaufgaben VI)*

Lösen Sie das folgenden lineare Program:

$$\text{maximiere} \qquad p(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\leq 6\,, \\ 3x_1 - 2x_2 &\leq 6\,, \\ x_1 &\geq 7\,, \\ x_2 &\geq 0\,. \end{aligned}$$

**Aufgabe 76** *(Lineare Programmierung / Maximierungsaufgaben VII)*

Ein Unternehmen stellt zwei Produkte $P_1$und $P_2$ her, wozu die drei Rohstoffe $R_1$,$R_2$, und $R_3$ eingesetzt werden. Die folgende Tabelle gibt an, welche Rohstoffmengen für die Herstellung je einer Mengeneinheit (ME) der Produkte benötigt werden:

| | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ |
|---|---|---|---|
| $P_1$ | 4 | 2 | 4 |
| $P_2$ | 1 | 6 | 2 |

Von den Rohstoffen $R_1$und $R_2$ stehen maximal 280 bzw. 360 ME zur Verfügung. $R_3$ ist im Überfluß vorhanden; Es sollen jedoch mindestens 120 ME von $R_3$ verbraucht werden.

Aus technischen Gründen kann von $P_1$ nicht mehr hergestellt werden als von $P_2$.

Die Deckungsbeiträge der Produkte $P_1$bzw. $P_2$ sind 450 GE bzw. 300 GE.

Welches ist das optimale Produktionsprogramm, bei dem der Gesamtdeckungsbeitrag maximal ist?

1. Formulieren Sie ein LP – Modell zur Lösung des Problems$\geq$.
2. Fertigen Sie eine graphische Darstellung des Modells an, und kennzeichnen Sie die Menge der zulässigen Lösungen.
3. Ermitteln Sie graphisch das optimale Produktionsprogramm.

   4.3: $x_1 = 45$, $x_2 = 45$, $z_{max} = 33750$

**Aufgabe 77** *(Lineare Programmierung / Maximierungsaufgaben VIII)*

In einem Produktionsbetrieb werden aus den drei Rohstoffen $R_1, R_2$ und $R_3$ die beiden Endprodukte $E_1$ und $E_2$ hergestellt. Für 1 kg von Produkt $E_1$ werden 2 kg von Rohstoff $R_1$ und 4 kg von Rohstoff $R_3$ benötigt. In die Produktion von 1 kg $E_2$ gehen 3 kg von $R_1$, 1 kg von $R_2$ und 3 kg von $R_3$ ein. Jedes der Endprodukte liefert einen Deckungsbeitrag von 50 DM/kg. Pro Tag entstehen fixe Kosten in Höhe von 2000 DM. Am letzten Tag eines Produktionszyklus stehen noch Lagerbestände von 360 kg $R_1$, 100 kg $R_2$ und 600 kg $R_3$ zur Verfügung.

1. Stehen Sie die Standardform für dieses LP Problem auf.
2. Ermitteln Sie graphisch das optimale Produktionsprogramm für diesen Tag, d.h. die Produktionsmengen der Erzeugnisse $E_1$ und $E_2$ mit dem höchsten Deckungsbeitrag.
3. Berechnen Sie die Lösung mit Hilfe des Simplexalgorithmus.

**Aufgabe 78** *(Lineare Programmierung / Maximierungsaufgaben IX)*

Der Besitzer der Tanzschule " Leicht&Co." möchte sein Gewinn, der aus den Einzahlungen der dort teilnehmenden Frauen und Männer bestehen soll, optimieren. Dabei wurden schon feste Preise festgelegt: für Frauen i.H. von 150 DM und für Männer i.H.von 100 DM monatlich.

Aus der Erfahrung weiß Herr Leicht, daß grundsätzlich mehr Männer zum Unterricht kommen als Frauen, da sich in der Nähe der Tanzschule ein Männer-Club befindet.

Die Frauen brauchen grundsätzlich 1h pro Monat, um sich die Tanzschritte einzuprägen, während die Männer doppelt so viel Zeit brauchen. Herr Leicht stellt dafür 80h pro Monat zur Verfügung.

Die Tanzfläche ist 75qm groß, wobei die Männer 1qm zum Tanzen beanspruchen und die Frauen das Vierfache.
Berechnen sie die optimale Anzahl der Frauen / Männer für das vorliegende LP-Problem.

1. Stellen Sie die Lösung graphisch dar.
2. Lösen Sie das LP-Problem mit Hilfe des Simplex-Verfahrens.

**Aufgabe 79** *(Lineare Programmierung / Minimierungsaufgabe)*

Für einen neuen Hollywood-Kassenschlager "Nelli" sollen Videoaufnahmen der wichtigsten Liebesszene in der Atacama-Wüste im Süden Perus gedreht werden.
Aufgrund des hohen Finanzmittelbedarfs sollen die Kosten auf das Nötigste minimiert werden.
In diesem Sinne bekommen die Schauspieler eine Aufwandsentschädigung i.H. von 1.000 $; die Statisten, für welche dies ein "Karriere-Sprungbrett" bedeuten würde, bezahlen die Selbstkosten für die Aufnahmen i.H. von 2.000 $.
Für die Aufnahmen wurden insgesamt nicht mehr als 8 Wohnmobile überlassen, wobei die Schauspieller die Wohnmobile alleine nutzen sollen. Die zugereisten Statisten, die an etwas weniger Luxus gewöhnt sind, sollen dagegen die Wohnmobile zu dritt bewohnen.
Weiterhin ist dem Regisseur wichtig, daß der Unterschied zwischen Schauspielern und Statisten weniger als 4 Personen betragen soll.
Für die choreographische Umsetzung der Szenen wurde ein Tanzlehrer angagiert, der täglich auf höhstens 12h Arbeitszeit belastbar ist; für die Vorbereitung der Schauspieler benötigt er jeweils 0,5h pro Schauspieler und für die Statisten jeweils 1,5h.
Berechnen sie die optimale Anzahl der Schauspieler / Statisten für das vorliegende LP-Proble

1. Lösen Sie das LP-Problem mit Hilfe des Simplex-Verfahrens.
2. Interpretieren Sie das erhaltene Ergebnis.

# 6 Lineare Differentialgleichungen

**Aufgabe 80** *(Lösung von Differentialgleichungen I)*

1. Lösen Sie die Differentialgleichung $y'(t) + 2ty(t) = t$. Wie lautet die eindeutige Lösung mit der Anfangsbedingung $y(0) = 2$ ?

**Aufgabe 81** *(Lösung von Differentialgleichungen II)*

1. Berechnen Sie die allgemeine Lösung von $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$!
2. Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung $2xy' - 2y = 3x^3$!

**Aufgabe 82** *(Lösung von Differentialgleichungen III)*

Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben.

1. $f' - 2xf = 0$ mit $f(1) = 4$,
2. $2xf' - 2f = 3x^3$ mit $f(1) = 7$,
3. $f' - 2xf = x \cdot e^{-x^2}$ mit $f(1) = 9$.

**Aufgabe 83** *(DGL' s / Klausuraufgabe I)*

Bestimmen Sie die eindeutige Lösung der folgenden Diffentialgleichung

$$y' = y \cdot x \cdot \cos x + x^2 \cdot e^{x \cdot \sin x + \cos x}$$

unter der Bedingung

$$y(1) = 0\,!$$

Führen Sie die Trennung der Variablen sowie die Variation der Konstanten durch.

**Aufgabe 84** *(DGL' s / Klausuraufgabe II)*

1. Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung an! Sie müssen die Methoden der *Trennnung der Variablen* und *Variation der Konstanten* benutzen!

$$y' - xy = e^{\frac{x^2}{2}}\,.$$

2. Wie lautet die Lösung, wenn für $x = 1$ der Funktionswert $y = f(x) = 0$ ist?

**Aufgabe 85** *(DGL' s / Klausuraufgabe III)*

Bestimmen Sie die Lösung von folgendem Anfangswertproblem:

$$y' - 5y = \quad e^{5x}(-\tfrac{\sin x}{\cos x})\ln(\cos x)$$

$$y(0) = 5$$

**Aufgabe 86** *(DGL' s / Klausuraufgabe IV )*

Lösen Sie folgendes DGL!

$$y' - 5y = e^{5x}\left(-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)\ln(\cos(x))\ .$$

Zusatz: Spezielle Lösung für $y(0) = 2$?

**Aufgabe 87** *(DGL' s / Klausuraufgabe V )*

1. Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung an! Sie müssen die Methode der *Variation der Konstanten* benutzen!
$$y' - xy = e^{\frac{x^2}{2}}\ .$$
2. Wie lautet die Lösung, wenn für $x = 1$ der Funktionswert $y = f(x) = 0$ ist?

**Aufgabe 88** *(DGL' s / Klausuraufgabe VI )*

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}y(x) - \frac{y(x)}{x} = \ln(x)$$

unter der Anfangsbedingung y(1) = 5.

**Aufgabe 89** *(DGL' s / Klausuraufgabe VII)*

Bestimme Sie mit der Methode der Trennung der Variablen und Variation der Konstanten die Lösung des folgenden Anfangswertproblem.

$$y' = \frac{1}{8}ty + \frac{t}{8}\left(\exp\left(\frac{t^2}{16}\right)\sin t + 1\right); \qquad y(0) = 0$$

**Aufgabe 90** *(*** Lösung von Differentialgleichungen )*

Bestimme Sie mit der Methode der Trennung der Variablen und Variation der Konstanten die Lösung des folgenden Anfangswertproblem.

$$y^{'} = \frac{1}{8}ty + \frac{t}{8}\left(\exp\left(\frac{t^2}{16}\right)\sin t + 1\right); \qquad y(0) = 0$$

**Aufgabe 91** *(DGL' s - Klausurfrage)*

Geben Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ der folgenden Differentialgleichung an!$x'(t) + x(t) = \sin t$

**Aufgabe 92** *(Anwendungsaufgaben / Dynamische Prozeße)*

Ein Faß enthält $z_0$ Gramm Zucker gelöst in 200 l Wasser. Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ fließt mit einer Rate von 4 l/min Zuckerwasser mit der Konzentration 10 g/l in das Faß. Die gut durchmischte Lösung wird mit einer Rate von ebenfalls 4 l/min abgezapft. Bestimmen Sie die Funktion des Zuckergehalts $z(t)$ (in kg)! Hinweis: Benutzen Sie

`Veränderung = Zufluß (je min) - Abfluß (je min)`

zur Bestimmung der Differentialgleichung.

**Aufgabe 93** *(Anwendungsaufgaben / Dynamische Marktpreismodelle)*

Berechnen Sie für das dynamische Marktpreismodell

$$p'(t) = k(p_{\mathrm{GG}} - p(t)), \quad k \in \mathbb{R}^+$$

die allgemeine Lösung! Beschreiben Sie die Preisentwicklung für $p(0) = 0$, $p(0) = p_{\mathrm{GG}}$, und $p_0 = 2p_{\mathrm{GG}}$!

**Aufgabe 94** *(Anwendungsaufgaben / Klausuraufgabe)*

"Nokio" baut die nächste Generation von Mobiltelefonen: Ein eingebauter Sprachcomputer übersetzt Gespräche mit ausländischen Teilnehmern selbstständig. "Nokio" möchte nun eine Prognose erstellen, wieviele Telefone sie über die Zeit $t$ (in Wochen) verkaufen. Eine Marktanalyse brachte folgendes Ergebnis: Die Grenzverkaufsfunktion berechnet sich aus dem durchschnittlichen Verkauf plus einem zusätzlichen Term von $(\ln t)^3$, der durch den geplanten Werbeeinsatz entsteht.

1. Stellen Sie die Differentialgleichung auf, die den Veränderungsprozeß der Verkaufsfunktion beschreibt.
2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.
3. Geben Sie die spezielle Lösung der Differentialgleichung für $f(1) = 1$ an.
4. Wieviele Geräte würden demnach in der 20. Woche verkauft?

# 7 Funktionen mehrerer Veränderlicher

**Aufgabe 95** *(Funktion mit mehreren Veränderlichen/Grenzwerte und partielle Ableitungen I)*

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^2 y - y}{x}$$

2. $$\lim_{y\to 1} 3x^2 + 4xy - 2y^2$$

**Aufgabe 96** *(Funktion mit mehreren Veränderlichen/Grenzwerte und partielle Ableitungen II)*

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = x^2 y$$

1. Berechnen Sie den Grenzwert
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,y_0) - f(1,y_0)}{h} \; !$$

2. Berechnen Sie die erste partielle Ableitung
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$
an der Stelle $(1, y_0)$ .

**Aufgabe 97** *(Funktion mit mehreren Veränderlichen/Grenzwerte und partielle Ableitungen III)*

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = x^3 y + e^{xy^2}$$

1. Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen.
2. Berechnen Sie alle zweiten partiellen Ableitungen.
3. Vergleichen Sie die beiden gemischten zweiten partiellen Ableitungen untereinander.

**Aufgabe 98** *(Funktionen mit mehreren Veränderlichen / Nullstellen)*

Berechnen Sie die gemeinsamen Nullstellen der ersten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

1.
$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy$$

2.
$$f(x,y) = -\frac{1}{3}y - (y-x)^2 + \ln(x)$$

3.
$$f(x,y) = x^2y + xy^2$$

**Aufgabe 99** *(Funktionen mit mehreren Veränderlichen / Höhenlinien)*

Berechnen Sie die Höhenlinien $f(x,y) = 0$ für die Funktion
$$f(x,y) = \left(x^2 - y^2\right) e^x$$
und zeichnen Sie die berechneten Höhenlinien in ein rechtwinkliges $xy$–Koordniatensystem ein.

**Aufgabe 100** *(Funktionen mit mehreren Veränderlichen / Homogenität)*

Bestimmen Sie, ob die folgenden Funktionen homogen sind. Wenn das der Fall ist, geben Sie den Grad an und interpretieren Sie diesen.

1.
$$z(x,y) =^3 \sqrt{x^2 \cdot y^4}$$

2.
$$s(t,u) = \frac{2t^2 + 6u}{3u^2}$$

**Aufgabe 101** *(Funktionen mit mehreren Veränderlichen/Definitheit von Matrizen)*

Überprüfen Sie, ob folgende Matrizen positiv (semi–)definit, negativ (semi–)definit oder nicht definit sind.

1.
$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.
$$A := \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.

$$A := \begin{pmatrix} -4 & 0 & -\frac{16}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}\sqrt{5} \\ -\frac{16}{3} & \frac{4}{3}\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$$

1.

$$A := \begin{pmatrix} -4 & 0 & -\frac{16}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3}\sqrt{5} \\ -\frac{16}{3} & -\frac{4}{3}\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 102** *(Funktionen mit mehreren Veränderlichen/Extremwerte I)*

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen mit mehreren Veränderlichen jeweils die erste partielle Ableitungen.

1.

$$K(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1 \cdot x_2 + 10$$

2. Bestimmen Sie von folgender Funktion auch die zweiten partiellen Ableitungen.

$$U(a,b,c) = 2\sqrt{a} + 16\sqrt{b} + 24\sqrt{c} - 3a^2 \cdot b - 4b^3 \cdot c - 5a \cdot c^2 + a \cdot b \cdot c - 10$$

3. Bestimmen Sie die ersten Ableitungen des folgenden allgemeinen Polynoms n-ten Grades:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\sum_{i=1}^{n} i \cdot x_i^i)^p = (x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^3 + \cdots + n \cdot x_n^n)^p$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = p \cdot (x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^3 + \cdots + nx_n^n)^{p-1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = p \cdot (x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^3 + \cdots + nx_n^n)^{p-1} \cdot 4x_2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = p \cdot (x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^3 + \cdots + nx_n^n)^{p-1} \cdot 9x_3^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = p \cdot (x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^3 + \cdots + nx_n^n)^{p-1} \cdot 16x_4^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = p \cdot (x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^3 + \cdots + nx_n^n)^{p-1} \cdot n^2 \cdot x_n^{n-1}$$

**Aufgabe 103** *(Funktionen mit mehreren Veränderlichen/Extremwerte II)*

1. Bestimmen Sie die Lage und Art aller Extrema der Funktion

$$f(x,y,z) = (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-5)^2 + 5$$

mit Hilfe der Hessematrix.

1. Bestimmen Sie die Werte und die Art aller Extrema der Funktion
$$g\,(x,y,z)=3\cdot e^{-\left(5+(x+2)^2+(y-5)^2+(z-3)^2\right)}\,.$$

**Aufgabe 104** *(Funktionen mit mehreren Veränderlichen/Extremwerte III)*

Bestimmen Sie für
$$h\,(x,y,z)=\left((x-2)^2+y^2\right)+z\left(4x^2+y^2-4\right)$$
die Lage und Art der Extrema mit Hilfe der Hessematrix.

**Aufgabe 105** *(Funktionen mit mehreren Veränderlichen/Extremwerte IV)*

Untersuchen Sie alle Extremstellen der Funktion:
$$f(x,y)=x^3+2\,\frac{y^2}{x+1}-3\,x^2$$

**Aufgabe 106** *(Funktionen mit mehreren Veränderlichen/Klausurfrage)*

Gegeben sei die Funktion
$$h(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$$
$$D(h)=\left\{(x,y),\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\,\middle|\,x^2+y^2\leq 1\right\}\,.$$

Bestimmen Sie die Extrema von $h$. Handelt es sich dabei um Minima, Maxima oder Sattelpunkte?

**Aufgabe 107** *(Extrema unter Nebenbedingungen / Lagrangemethode I)*

Eine Funktion $f$ sei von zwei Variablen $x$ und $y$ abhängig. Dabei sei $f$ proportional zu $x^2$ multipliziert mit der quadrierten Differenz zwischen $y$ und 5. Der Proportionalitätsfaktor sei 1. Außerdem soll $y$ doppelt so groß sein wie $x$. Bestimmen Sie die Extrema der Funktion mit Hilfe der Lagrangemethode!

**Aufgabe 108** *(Extrema unter Nebenbedingungen / Lagrangemethode II)*

Ein Unternehmen hat zwei voneinander unabhängige Fertigungsbetriebe. Der Gewinn in jedem Betrieb ist eine Funktion des eingesetzten Kapitals. Mit $x$ und $y$ als den eingesetzten Kapitalmengen in beiden Betrieben betragen die Gewinne
$$G_1=120\cdot\sqrt{x}\quad\text{und}\quad G_2=160\cdot\sqrt{y}$$
Die gesamte verfügbare Kapitalmenge beträgt $K=4\,000\,000$ DM.

1. Wie muss diese Kapitalmenge auf die beiden Betriebe aufgeteilt werden, damit der Unternehmensgewinn maximal wird? Verwenden Sie zur Beantwortung der Frage die Methode von Lagrange!

2. Überprüfen Sie, ob an der von Ihnen berechneten Extremwertstelle auch tatsächlich ein Maximum vorliegt. Hierzu ist die Substitutionsmethode anzuwenden!

**Aufgabe 109** *(Extrema unter Nebenbedingungen / Lagrangemethode III)*

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-2)^2 + 4$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Besitzt die Funktion ein Maximum oder ein Minimum? An welcher Stelle liegt der Extremwert und wie groß ist er?
2. Untersuchen Sie dieselbe Funktion auf einen Extremwert unter Berücksichtigung der Nebenbedingung $y = x + 1$. Verwenden Sie die Methode von Lagrange. An welcher Stelle liegt der Extremwert? Wie groß ist er?

**Aufgabe 110** *(Extrema unter Nebenbedingungen / Lagrangemethode IV)*

Sie möchten ein Pharma-Unternehmen gründen, welches ein wirksames und leider sehr teures Schmerzmittel " Vaspirin" herstellen soll. Nach einem empirischen Schätzungsverfahren ist über den Kostenverlauf für ein solches Unternehmen (Annahme: kein Schwund, keine sonstigen Verluste) folgendes bekannt:
Die Ableitung der Kostenfunktion (Grenzkostenfunktion) ist:

$$K'(x) = 0.5x - 10\,.$$

Es existiert weiterhin ein Fixkostenblock in Höhe von 250 Geldeinheiten.
Dabei wird mit $x$ die Menge hergestellter Tabletten bezeichnet.

1. Gesucht ist die optimale Menge und der optimale Preis unter der Voraussetzung, daß der Gewinn maximiert werden soll, der Umsatz 800 Geldeinheiten betragen soll und alle hergestellten Tabletten abgesetzt werden können.
   Lösen Sie diese Aufgabe mit Hilfe der *Lagrangemethode* und überprüfen Sie das erhaltene Optimum.
2. Angenommen, die Kostenfunktion verändert sich aufgrund einer fehlerhaften Einschätzung und lautet nun

   $$K(x) = 0.5x^2 - 20x + 100\,.$$

   Wie hoch muß jetzt die optimale Produktionsmenge bei gleicher Restriktion wie bei 1. sein? Geben Sie auch den Preis und den sich ergebenden Gewinn an!

**Aufgabe 111** *(Extrema unter Nebenbedingungen / Lagrangemethode VI)*

Gegeben seien die Funktionen $f : D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

und $g : D \to \mathbb{R}$,

$$g(x,y) = (x+y)^2 - 9\,.$$

1. Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = 0$$

   mit Hilfe der Methode von Lagrange.

2. Entscheiden Sie, welche der unter 1. ermittelten Extremstellen Minima und welche Maxima sind. Verwenden Sie hierzu die Substitutionsmethode.

**Aufgabe 112** *(Extrema unter Nebenbedingungen / Lagrangemethode VII)*

Einem Haushalt steht eine bestimmte Geldmenge $C$ für Konsumzwecke zur Verfügung, die er auf drei verschiedene Konsumgüter $x$ , $y$ und $z$ verteilen kann. Die zugehörigen Preise $p_x$, $p_y$ und $p_z$ seien unabhängig von der Höhe der Nachfrage nach den Gütern. Weiterhin kann man jedem Gut einen bestimmten Nutzen $U$ zuordnen, der abhängig von der jeweiligen Menge ist:

$$U_x = 2\sqrt{x} \qquad U_y = 16 \cdot \sqrt{y} \qquad U_z = 24 \cdot \sqrt{z}\,.$$

Außerdem sei $C = 537$, $p_x = 1$, $p_y = 6$ und $p_z = 3$ . Geben Sie die Mengenkombinationen an, für die der Gesamtnutzen des Haushaltes maximiert wird (Lagrangemethode!). Der Einfachheit halber unterstellen wir eine Gesamtnutzenfunktion, die sich additiv aus den Einzelnutzen zusammensetzt.

**Aufgabe 113** *(Extrema unter Nebenbedingungen / Lagrangemethode VIII)*

Berechnen Sie die Extrema folgender Funktionen unter den angegebenen Nebenbedingungen mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes:

1. $\max g(x, y) = 15x + 10y - 2x^2 - y^2$
   NB: $3x + 2y = 4$

2. $\min g(x, y) = 15x + 25y$
   NB: $x \cdot e^y = 3840$

**Aufgabe 114** *(Extrema unter Nebenbedingungen / Substitutionsmethode I)*

Herr M. ist Apotheker und stellt ein spezielles Schmerzmittel aus den Wirkstoffen $A$ und $B$ selbst her. Eine Packung (Einheit) enthält 4 g von Wirkstoff $A$ 4 g und 1 g von $B$. Zur Zeit verbraucht er monatlich 47 Einheiten von $A$ und 100 von $B$, wobei er nur eine begrenzte Gesamtmenge (in Gramm) monatlich zur Verfügung hat, die er immer vollständig aufbraucht. Herr M. möchte seine Schmerzmittelproduktion $S$ optimieren. Er weiß, daß seine quadrierte Produktionsmenge sich aus dem Produkt der zu verbrauchenden Mengen der jeweiligen Wirkstoffe multipliziert mit dem konstanten Faktor 900 ergibt. Lösen Sie das Problem für Herrn M. mit Hilfe der Substitutionsmethode!

**Aufgabe 115** *(Extrema unter Nebenbedingungen / Substitutionsmethode II)*

Ein Mikroprozessor der Firma Pewlett–Hackard wird sowohl in Singabpur als auch in Hongkong und Korea hergestellt. Aufgrund unterschiedlicher Fertigungsverfahren sind die Stückkosten für das gleiche Produkt in den drei Werken verschieden. Bei der Herstellung von $x_i$ Stück der Mikroprozessoren im Werk $i$ fallen folgende Kosten an:

$$\begin{aligned} K_1(x_1) &= 50 + 100 \cdot x_1 \,, \\ K_2(x_2) &= 150 + x_2^2 \,, \\ K_3(x_3) &= 180 + \frac{1}{3} x_3^3 \,. \end{aligned}$$

Im ersten Halbjahr des nächsten Jahres sollen 100 und im zweiten Halbjahr 200 Stück produziert werden.

1. Berechnen Sie durch Anwendung der Substitutionsmethode die kostengünstigste Aufteilung der Produktion auf die drei Werke. Vergleichen Sie die ermittelten Ergebnisse der beiden Halbjahre.
2. Überprüfen Sie, ob die von Ihnen aufgestellten Produktionspläne auch wirklich die kostengünstigsten sind.

**Aufgabe 116** *(Extrema unter Nebenbedingungen / Klausuraufgabe)*

Eine Verpackungsfirma hat den Auftrag, einen Karton aus Plastik zu fertigen, der genau 8 m$^3$ faßt. Der Karton soll geschlossen sein und die Form eines Quaders mit den Kantenabmessungen $a$, $b$ und $c$ haben (es gibt sechs Seitenflächen). Es wird angenommen, daß die Seitenflächen mit vernachlässigbaren Kosten verschweißt werden können. Die Firma ist bemüht, die Materialkosten zu minimieren. Der Einkaufspreis für 1 m$^2$ des benötigten Plastiks beträgt 100 DM.

1. Welche Kantenabmessungen $a$, $b$ und $c$ muß der Karton haben, damit minimale Materialkosten anfallen?
2. Wieviel Materialkosten fallen mindestens für einen Karton an?
3. Gibt es Kartonabmessungen, so daß die Kosten maximal werden (kurze Begründung)?