AUFGABE

Die Gesamtkostenfunktion K einer Fabrik sei gegeben durch
$K(x) = 0{,}01x^3 - 9x^2 + 3000x + 250000$,
die Kapazitätsgrenze x_{kap} betrage 850 ME. Es wird vollständige Konkurrenz angenommen.

Teil 1:
Untersuchen Sie die Gesamtkostenfunktion K, die Grenzkostenfunktion K', die Funktion der variablen Durchschnittskosten k_v sowie die Stückkostenfunktion k.

Teil 2:
Bestimmen Sie die gewinnmaximale Absatzmenge des Unternehmens, wenn beim Verkauf von 800 Maschinen ein Gesamterlös von 2.280.000.- GE erzielt wird.

Teil 3:
Bestimmen sie die Gewinnzone und den maximalen Gewinn.

Lösung Teil 1

Gesamtkostenfunktion K mit $K(x)=0{,}01x^3-9x^2+3000x+250000$, $x_{kap}=850$.

Die **Gesamtkostenfunktion K** ordnet jeder Ausbringungsmenge x die jeweiligen Kosten K(x) zu.

K ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades mit dem Definitionsbereich [0; 850].

Der Schnittpunkt des Graphen von K mit der Ordinate liegt bei (0; 250000). Dies bedeutet, dass bei einer Produktionsmenge von 0 ME (hier: Maschinen) 250.000.- GE (hier z.B. €) Fixkosten anfallen; z. B. für die Miete der Fabrikhalle. Die **fixen Kosten** betragen also **K_f=250.000** GE.
Subtrahiert man die fixen Kosten von den Gesamtkosten so erhält man die **variablen Gesamtkosten** K_v, es gilt **$K_v(x)=0{,}01x^3-9x^2+3000x$** . Zu den variablen Kosten gehören z. B. die Materialkosten.

Der Graph von K ist s-förmig. Er ist streng monoton steigend (Nachweis mit Hilfe des Monotoniekriteriums), d. h., mit zunehmender Ausbringungsmenge (Produktionsmenge) nehmen auch die Gesamtkosten zu.

Im Wendepunkt von K ist die Steigung am geringsten. Hier würde es sich also lohnen die Produktionsmenge zu erhöhen, denn die Gesamtkosten steigen dabei nur unwesentlich. Der Wendepunkt kann mit Hilfe von K'' und K''' berechnet werden.

Es gilt $K'(x)=0{,}03x^2-18x+3000$, $K''(x)=0{,}06x-18$ und $K'''(x)=0{,}06$.

Hinreichend für das Vorliegen einer Wendestelle ist $K''(x_w)=0$ und $K'''(x_w)$ 0.
Es gilt $0{,}06x_w-18=0$, d. h. $x_w=300$ und $K'''(x_w)=0{,}06>0$, d. h., $x_w=300$ ist eine Wendestelle von K. Wegen K(300)=610000 ist W(300/610000) Wendepunkt von K.

Grenzkostenfunktion K'

Unter Grenzkosten versteht man in der Wirtschaftstheorie den Kostenzuwachs, der durch die Herstellung einer zusätzlichen (math.: unendlich kleinen) Ausbringungsmenge entsteht. Die Grenzkostenfunktion K' ist die 1. Ableitungsfunktion der Gesamtkostenfunktion K; sie besitzt die Gleichung **$K'(x)=0{,}03x^2-18x+3000$**. Das Minimum der **Grenzkostenfunktion K'** befindet sich an der Wendestelle von K, also bei 300 ME. An der Wendestelle von K sind die Grenzkosten minimal.

Funktion der variablen Durchschnittskosten (Stückkostenfunkti

Die **variablen Stückkosten** berechnet man, indem man die variablen Gesamtkosten durch die Anzahl der produzierten Maschinen dividiert;

also , x 0.
Also: **$k_v(x)=0{,}01x^2-9x+3000$**.
Bei welcher Produktionsmenge sind die variablen Stückkosten am geringsten?
Hierzu ist das Minimum von k_v zu bestimmen.

Es gilt $k_v'(x)=0{,}02x-9$ und $k_v''(x)=0{,}02$.

Hinreichend für das Vorliegen eines Minimums von k_v ist $k_v'(x_{min})=0$ und $k_v''(x_{min})>0$.

Diese Bedingungen werden von $\mathbf{x_{min}=450}$ erfüllt. Diese Menge bezeichnet man als **Betriebsminimum**.
Die variablen Stückkosten betragen im Betriebsminimum $\mathbf{k_v(450)=975}$.
Würde man 975.-GE als Preis für eine Maschine verlangen, so würden bei einer Ausbringungsmenge von 450 Maschinen gerade noch die variablen Stückkosten gedeckt werden, nicht aber die Fixkosten. Dies kann sich ein Betrieb nur kurzfristig leisten.
Man bezeichnet $\mathbf{k_v(x_{min})}$ als **kurzfristige Preisuntergrenze** $\mathbf{p_{uk}}$.

Stückkostenfunktion k

Die **Stückkosten** berechnet man, indem man die Gesamtkosten durch die Anzahl

der produzierten Maschinen dividiert; also , x 0. Also: $\mathbf{k(x)=0{,}01x^2-}$

9x+3000+ .

Bei welcher Produktionsmenge sind die Stückkosten am geringsten?
Hierzu ist das Minimum von k zu bestimmen.

Es gilt $k'(x)=0{,}02x-9-$ und $k''(x)=0{,}02+$.

Hinreichend für das Vorliegen eines Minimums von k ist $k'(x_{opt})=0$ und $k''(x_{opt})>0$.

Es gilt:

$0{,}02x_{opt} - 9 - \quad =0 \mid *x_{opt}^2,\ x_{opt} \quad 0$

$0{,}02x_{opt}^3 - 9x_{opt}^2 - 250000=0 \mid : 0{,}02$

$x_{opt}^3 - 450x_{opt}^2 - 12500000=0$

Mit Hilfe des Newton-Verfahrens oder eines netten kleinen Rechenprogramms erhält man $\mathbf{x_{opt}=500}$ als Lösung obiger Gleichung und es gilt $k''(500)>0$. Diesen Wert bezeichnet man als **Betriebsoptimum**.
Die Stückkosten betragen im Betriebsoptimum $\mathbf{k(500)=1500}$.
Würde man 1500.-GE als Preis für eine Maschine verlangen, so würden alle Stückkosten bei einer Ausbringungsmenge von 500 Maschinen gedeckt werden.
Dies kann sich ein Betrieb längerfristig leisten.
Man bezeichnet $\mathbf{k(x_{opt})}$ als **langfristige Preisuntergrenze** $\mathbf{p_{ul}}$.

Fahre mit dem Mauszeiger über die Graphik und erfahre die Zusammenhänge zwischen den Funktionen!

Lösung Teil 2

Die gewinnmaximale Absatzmenge

Bei welcher Ausbringungsmenge wird der Gewinn maximal?

Der Gewinn ergibt aus der Differenz der gesamten Kosten und des Erlöses (Umsatzes), d. h. **Gewinn=Erlös - Kosten**. Die Kostenfunktion ist uns bereits bekannt, die Erlösfunktion muss jedoch noch bestimmt werden. Der Erlös ergibt sich durch Berechnung des Produkts aus Ausbringungsmenge und Stückpreis; z. B. bei 1000 verkauften Einheiten zu je 20.-DM beträgt der Erlös 20.000.- DM.

Allgemein gilt somit für die **Erlösfunktion E** : $E(x)=x*p(x)$, wobei $p(x)$ der Preis ist. Der Preis hängt von der Konkurrenzsituation auf dem Markt ab. Im Falle eines Angebotsmonopols, d. h., dass nur ein einziger Anbieter auf dem Markt ist, kann der Anbieter über seine eigene Angebotsmenge den Marktpreis mitbestimmen; im Falle der vollständigen Konkurrenz (Polypol), d. h., es gibt eine sehr große Anzahl an Anbietern, hat der Anbieter keine Möglichkeit den Marktpreis über seine eigene Angebotsmenge zu beeinflussen, denn der Käufer kann ja zum Konkurrenten abwandern. Der Anbieter muss den Marktpreis akzeptieren; der **Preis** ist in diesem Fall somit eine Konstante **p(x)=p**. Dies trifft auf unser Beispiel zu. Also $E(x)=x*p$.
Da bei einem Verkauf von 800 Maschinen ein Gesamterlös von 2.280.000.- GE erzielt wird, gilt
$E(800)=800*p=2280000$ und somit **p=2850**; der Preis für eine Maschine beträgt demnach 2850.- GE.
Nun lässt sich die Gleichung der Erlösfunktion angeben **E(x)=2850x**.

Die Gleichung der **Gewinnfunktion G** lautet demnach
$G(x)=E(x)-K(x)=2850x-(0{,}01x^3-9x^2+3000x+250000)$,
nach Zusammenfassung des Terms erhält man

$G(x)=-0{,}01x^3 + 9\cdot x^2 - 150\cdot x - 250000$.
Jetzt können wir mit Hilfe von G' und G'' die gewinnmaximale Absatzmenge berechnen; sie entspricht der Stelle, an der die Gewinnfunktion ein Maximum besitzt.

Es gilt: $G'(x)=-0{,}03x^2+18x-150$ und $G''(x)=-0{,}06x+18$.

Hinreichend für das Vorliegen eines Maximums von G ist $G'(x_E)=0$ und $G''(x_E)<0$.

Die Gleichung $-0{,}03x_E^2+18x_E-150=0$ ist zu lösen.
Normierung der quadratischen Gleichung und Anwendung der p-q-Formel liefern die Lösung x_E 591,5475947, welche auch die Bedingung $G''(x_E)<0$ erfüllt. Die **gewinnmaximale Absatzmenge** beträgt also **592 ME**. Produziert und verkauft man 592 Maschinen, so erwirtschaftet man den maximalen Gewinn.

Fahre mit dem Mauszeiger über die Graphik und erfahre die Zusammenhänge zwischen den Funktionen!

Lösung Teil 3

Die Gewinnzone und der maximale Gewinn

Zur Berechnung der **Gewinnzone** sind die Nullstellen der Gewinnfunktion G zu bestimmen. Es ist die Gleichung $-0{,}01x_N^3 + 9\cdot x_N^2 - 150\cdot x_N - 250000=0$ zu lösen. Dies ist nur näherungsweise, z. B. mit Hilfe des Newton-Verfahrens, möglich. Man erhält x_{N1} 200 und x_{N2} 847; d. h., die **Gewinnschwelle** beträgt 200 Maschinen und die **Gewinngrenze** 847 Maschinen; ein Gewinn wird erwirtschaftet, wenn die Produktionsmenge **zwischen 200 und 847 Maschinen** liegt.
Den **maximalen Gewinn** erhält man bei einer Produktion von 592 Maschinen, er beträgt **740.629.- GE** , denn es gilt

G(592) 740629,
(vgl. Abbildung und Lösung Teil 2).