

Parabelfunktionen

Teil 4

Aufgaben Nr. 14 bis 18

Hier nur Lösung von Nr. 14.

Auf der Mathematik-CD befinden sich alle Lösungen

Parabelfunktionen
mit vielen Zusatzaufgaben

(Keine Integration)

Datei Nr. 42051 S

Januar 2001

Friedrich W. Buckel

Internatsgymnasium Schloß Torgelow

Aufgabe 14

Gegeben ist eine Parabel K durch die Funktion $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{9}{2}$

- Berechne den Scheitel der Parabel sowie deren Schnittpunkt mit den Koordinatenachsen.. Zeichne die Parabel für $-4 \leq x \leq 6$
- Die Punkte A $(-2 | y_A)$ und B $(3 | y_B)$ liegen auf der Parabel K. Berechne die Gleichung der Sekante $g = (AB)$ und die Länge der Sehne AB.
- Das Lot in A auf g schneidet die Parabel K noch einmal in C. Berechne den Inhalt des Dreiecks ABC.
- Unter welchen Winkeln schneiden sich die Tangenten in A und in B mit der Geraden AB ?
- Berechne den Kurvenpunkt D, in dem die Tangente parallel zu AB ist.

Aufgabe 15

Gegeben ist eine Parabel K durch die Funktion $y = f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{9}{2}$

und die Gerade g durch die Gleichung $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

- Berechne den Scheitel der Parabel sowie deren Schnittpunkt mit den Koordinatenachsen.. Zeichne die Parabel für $-3 \leq x \leq 7$
- Berechne die Schnittpunkte von P und Q von K und g.
- Die Tangenten in P und Q bilden zusammen mit g ein Dreieck. Berechne den dritten Eckpunkt Z und den Dreiecksinhalt.
- Welche Gleichung hat die Tangente an K, die zu g parallel ist ?

Aufgabe 16

Gegeben sind die Parabeln K_1 durch $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 1$ und

K_2 durch $g(x) = -x^2 + 6$.

- Berechne die Scheitel der Parabeln und zeichne die Kurven in ein gemeinsames Achsenkreuz.
- In welchen Punkten A, B und unter welchen Winkeln schneiden sie sich ? Wie lang ist die gemeinsame Sehne AB ?
- Berechne den Inhalt des Vierecks S_1AS_2B .

Aufgabe 17

Gegeben ist die Parabel K durch ihre Gleichung

$$y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x$$

- Berechne Scheitel und Schnittpunkte mit der x-Achse.
Zeichne K in ein Achsenkreuz (beide Achsen von -4 bis 8, LE 1 cm)
- Die Gerade g: $y = -x + \frac{9}{4}$ schneidet K in den Punkten A und B.
Berechne die Länge der Sehne AB.
- Das Lot vom Ursprung auf g schneidet K nochmals in D.
Berechne die Länge dieser Sehne OD.
- Berechne den Inhalt der Vierecks OADB.
- K hat eine zur Geraden $y = x$ parallele Tangente.
Berechne den Berührungspunkt und die Gleichung dieser Tangente.
- Die Sehne AB und die Tangenten in A und B bilden ein Dreieck.
Berechne den dritten Eckpunkt C, den Innenwinkel α bei A und den Flächeninhalt.

Aufgabe 18

Gegeben ist die Parabel K durch die Funktion

$$y = f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$$

- Berechne Scheitel und Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
Zeichne die Parabel für mit Längeneinheit 1 cm.
- Die Punkte A $(-3 | y_A)$ und B $(3 | y_B)$ liegen auf der Parabel K.
Berechne die Gleichung der Geraden (AB).
- Es gibt eine Tangente an K, die parallel zu (AB) ist. Stelle ihre Gleichung auf.
Der Berührungspunkt heiße R.
- Die Tangenten in A und B bilden zusammen mit der Geraden g ein Dreieck ABC.
Berechne den dritten Eckpunkt C, den Innenwinkel γ bei C sowie den Inhalt des Dreiecks ABC.
- Die Gerade g: $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ schneidet K in P und Q.
Das Viereck ABPQ ist ein Trapez. Der Inhalt dieses Trapezes kann auf kürzeste Weise berechnet werden, wenn es gelingt, diese in zwei günstige Dreiecke zu zerlegen. Wie groß ist der Inhalt ?

Lösung Aufgabe 14

a) Gegeben ist die Parabel durch: $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{9}{2}$

Bestimmung des Scheitels durch die Ableitungsfunktion: $f'(x) = -x + 1$

Scheitelbedingung: $f'(x_S) = 0$ (das heißt: Waagerechte Tangente)

Aus $-x_S + 1 = 0$ folgt $x_S = 1$.

y-Koordinate: $y_S = f(1) = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{2} = 5$

Ergebnis: Parabelscheitel $S(1 | 5)$.

Schnittpunkte mit der x-Achse: Bed.: $f(x_N) = 0$ d.h.

$$-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{9}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{9}{2} = 0$$

Wir lösen eine quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ immer durch die allgemeine Lösungsformel (die im Volksmund auch "Mitternachtsformel" heißt):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die sogenannte p-q-Formel verwenden wir nie, weil sie bei vielen Aufgaben zu unhandlich ist.

Hat eine quadratische Gleichung speziell den Koeffizienten $a = \frac{1}{2}$, dann wird der Nenner $2a = 1$ und man benötigt Bruchstrich und Nenner nicht.

Hier ist $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ und $c = -\frac{9}{2}$. Daher liefert die Lösungsformel:

$$x_N = 1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{9}{2}\right)} = 1 \pm \sqrt{1 + 9} = 1 \pm \sqrt{10}$$

Ergebnis: $N_1(1 + \sqrt{10} | 0) \approx (4,1 | 0)$, $N_2(1 - \sqrt{10} | 0) \approx (-2,1 | 0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: Bed.: $x_R = 0$ also $y_R = f(0) = \frac{9}{2}$. $R(0 | \frac{9}{2})$

b) $f(-2) = -\frac{1}{2} \cdot 4 - 2 + \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$ d.h. $A(-2 | \frac{1}{2})$

$f(3) = -\frac{1}{2} \cdot 9 + 3 + \frac{9}{2} = 3$ d.h. $B(3 | 3)$.

Steigung der Geraden (AB): $m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - \frac{1}{2}}{3 - (-2)} = \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{5}{2 \cdot 5} = \frac{1}{2}$

Gleichung der Geraden (AB): $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 3) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + 3$

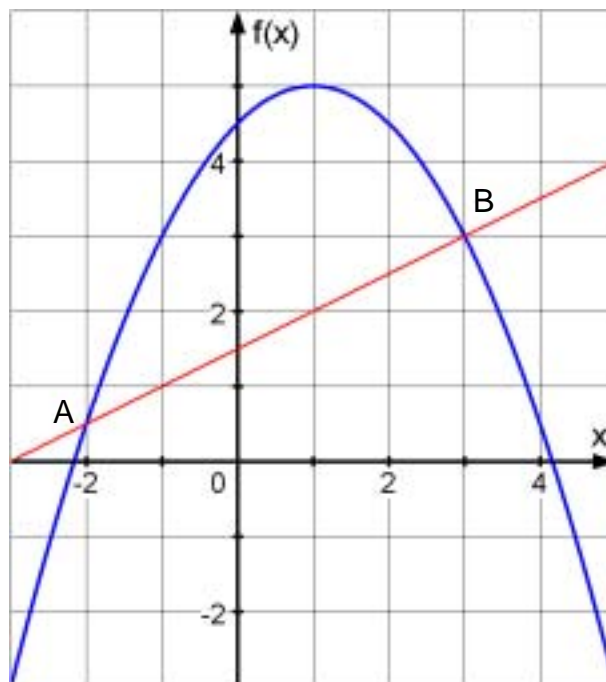
Ergebnis: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

Länge der Sehne AB:

$$\overline{AB} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{25 + \frac{25}{4}} = \sqrt{25 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right)} = 5\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$$

Schaubild der Parabel

$$K: \quad y = f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{9}{2}$$



c) Lot in A auf $g = (AB)$.

$$m_L = -\frac{1}{m_{AB}} = -2. \quad A(-2 | \frac{1}{2}).$$

Gleichung der Lotgeraden:

$$y - \frac{1}{2} = -2 \cdot (x + 2) \Leftrightarrow y = -2x - 4 + \frac{1}{2}$$

$$\text{Ergebnis: } y = -2x - \frac{7}{2}$$

Schnitt von L und K:

$$-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{9}{2} = -2x - \frac{7}{2}$$

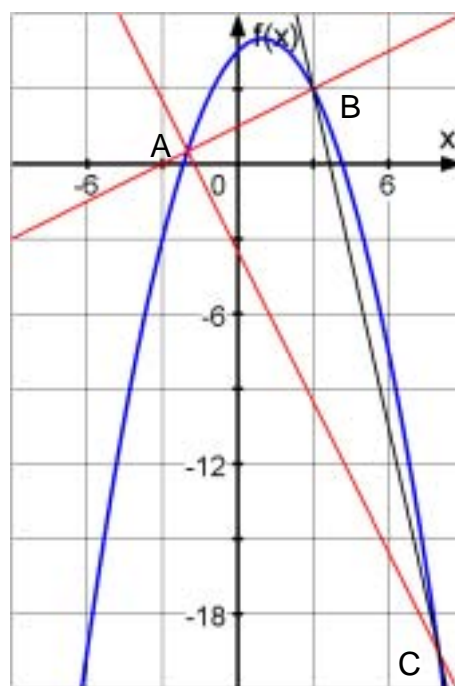
$$-\frac{1}{2}x^2 + 3x + 8 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2}x^2 - 3x - 8 = 0$$

$$x_C = 3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-8)} = 3 \pm \sqrt{9 + 16} = 3 \pm 5 = \begin{cases} 8 \\ -2 \end{cases}$$

Da $x = -2$ die x-Koordinate von A ist, bleibt $x_C = 8$.

$$y_C = -2 \cdot 8 - \frac{7}{2} = -16 - \frac{7}{2} = -\frac{39}{2} = -19,5$$

$$\text{Ergebnis: } C(8 | -19,5)$$



Da Dreieck ist bei $A(-2 | \frac{1}{2})$ rechtwinklig. Daher verwendet man AB als Grundseite und AC als Höhe.

$$\overline{AB} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{25 + \frac{25}{4}} = \sqrt{25 \cdot (1 + \frac{1}{4})} = 5\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{5} \quad (\text{siehe oben})$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(8+2)^2 + (-19,5-0,5)^2} = \sqrt{10^2 + (-20)^2} = \sqrt{10^2 + 20^2} = \sqrt{10^2(1^2 + 2^2)} = 10\sqrt{5}$$

$$\text{Flächeninhalt: } F = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \sqrt{5} \cdot 10\sqrt{5} = \frac{1}{4} \cdot 25 \cdot 10 = \frac{125}{2}$$

d) Für Tangentensteigungen benötigt man die Ableitungsfunktion $f'(x) = -x + 1$.

Steigung der Tangente in A $(-2 | \frac{1}{2})$: $m_1 = f'(-2) = 3$

Steigung der Tangente in: B $(3 | 3)$ $m_2 = f'(3) = -2$

Steigung der Geraden AB: $m_{AB} = \frac{1}{2}$

Schnittwinkel bei A: $\tan \alpha = \frac{m_1 - m_{AB}}{1 + m_1 m_{AB}} = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1$

Also ist $\alpha_1 = 45^\circ$ und $\alpha_2 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

Schnittwinkel bei B: $\beta = 90^\circ$, denn $m_2 \cdot m_{AB} = -1$, d.h.

die Tangente in B und die Gerade $g = (AB)$ sind orthogonal.

Hinweis: Wer nicht erkennt, daß die Steigung von g der negative Kehrwert der Tangentensteigung in B ist und daher mit der Schnittwinkelformel arbeitet, der kommt in folgende Situation:

$$\tan \beta = \left| \frac{m_2 - m_{AB}}{1 + m_2 m_{AB}} \right| = \left| \frac{-2 - \frac{1}{2}}{1 + (-2) \cdot \frac{1}{2}} \right| = \frac{\frac{5}{2}}{1 - 1} = \frac{5}{0}$$

Durch Null kann man nicht dividieren, also existiert kein Tangens des Winkels β . Dann spätestens muß man erkennen, daß hier orthogonale Geraden vorliegen. Jetzt weist man nach, daß $m_2 \cdot m_{AB} = -1$ ist und hat das Ergebnis $\beta = 90^\circ$!!!

d) Wo ist die Tangente parallel zu AB ?

Bedingung: $m_T = m_{AB} = \frac{1}{2}$. d.h. $f'(x) = -x + 1 = \frac{1}{2}$ also $x_D = \frac{1}{2}$.

$y_D = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = -\frac{1}{8} + 5 = \frac{39}{8}$

Ergebnis: In $D\left(\frac{1}{2} | \frac{39}{8}\right)$ ist die Tangente parallel zur Geraden (AB).