Analytische Geometrie des Kreises

Nicht vektoriell

Klassenarbeit Nr. 2

Datei Nr. 22 254 SOD

Drucken nur von der Mathematik-CD möglich

Dezember 2000

Fritz Buckel

Internatsgymnasium Schloß Torgelow

Aufgabe 1

Der Kreis um M (- 3 I - 1) hat die Gerade g : $y = -\frac{9}{2}x + 28$ zur Tangente.

a) Berechne die Koordinaten des Berührpunktes und die Gleichung des Kreises. (Ergebnis: $r = \sqrt{85}$).

b) Welche Gleichungen haben die zu g orthogonalen Tangenten ?

Aufgabe 2

Der Kreis k mit der Gleichung $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 85$ und die Geraden g mit der Gleichung $y = -3x + 5$ schneiden sich in S_1 und S_2.

a) Stelle die Gleichungen der Tangenten in S_1 und S_2 auf.

b) Berechne den Inhalt des Dreiecks MS_1S_2 und den Innenwinkel γ bei M.

Aufgabe 3

a) Gegeben ist ein Kreis k durch die Gleichung $x^2 + y^2 + 3x - 5y = \frac{15}{4}$

Welchen Mittelpunkt und welchen Radius hat dieser Kreis ?

b) Wie groß muß c mindestens sein, damit die Gleichung $x^2 + y^2 + 3x - 5y = c$ einen Kreis darstellt ?

c) Für welche Werte von t berührt der Kreis $(x-t)^2 + (y-2t)^2 = 36$ die x-Achse ?

Lösungen

Nr. 1: Gegeben ist der Kreismittelpunkt M (- 3 I - 1) und die Tangente

$T:\ y = -\frac{9}{2}x + 28:$

a) Das Lot von M auf T schneidet k im Berührpunkt B $m_L = -\frac{1}{m_T} = \frac{2}{9}$ d.h.

Lot L: $y+1 = \frac{2}{9}(x+3) \Leftrightarrow y = \frac{2}{9}x - \frac{1}{3}$

Schnittgleichung: $\frac{2}{9}x - \frac{1}{3} = -\frac{9}{2}x + 28 \,\big|\, \cdot 18$

$$4x - 6 = -81x + 504 \Leftrightarrow 85x = 510$$

$$x_B = 6$$

$$y_B = -\frac{9}{2}\cdot 6 + 28 = 28 - 27 = 1$$

Ergebnis: Berührpunkt der Tangente ist B (6 I 1).
Der Abstand $\overline{MB}$ ist der Kreisradius:

$$r^2 = \overline{MB}^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = 81 + 4 = 85$$

Kreisgleichung: $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 85$

b) Parallele p zu T durch M:

$y+1 = -\frac{9}{2}(x+3) \Leftrightarrow y = -\frac{9}{2}x - \frac{29}{2}$

Schnittpunkte von p und k:

$$(x+3)^2 + \left(-\frac{9}{2}x - \frac{27}{2}\right)^2 = 85$$

$$(x+3)^2 + \left(-\frac{9}{2}\right)^2 (x+3)^2 = 85$$

$$\left(1 + \frac{81}{4}\right)(x+3)^2 = 85$$

$$\frac{85}{4}(x+3)^2 = 85$$

$$(x+3)^2 = 4$$

> Beim Schnitt einer Geraden, die durch den Kreismittelpunkt geht mit dem Kreis, kann man wie links gezeigt, durch Ausklammern stark vereinfachen.
> Wer dies nicht tut, kommt nach langen Umformungen auf die quadratische Gleichung:
> $x^2 + 6x + 5 = 0$ mit denselben Lösungen wie links:

$$x + 3 = \pm 2 \Leftrightarrow x = -3 \pm 2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

Zu x_1 = - 1 gehört y_1 = - 10 d.h. B_1 (-1 I - 10)
Zu x_2 = - 5 gehört y_2 = 8 d.h. B_2 (- 5 I 8).

Die Tangenten in B_1 und B_2 haben die Steigung $m = \frac{2}{9}$, also folgt:

T_1: $y + 10 = \frac{2}{9}(x+1) \Leftrightarrow y = \frac{2}{9}x - \frac{88}{9}$

T_2: $y - 8 = \frac{2}{9}(x+5) \Leftrightarrow y = \frac{2}{9}x + \frac{82}{9}$

Nr. 2: Gegeben ist k durch: $(x+3)^2+(y+1)^2=85$ und g: y = - 3x+5

a) Schnittpunkte von g und k:

$$(x+3)^2+(-3x+6)^2=85$$
$$x^2+6x+9+9x^2-36x+36=85$$
$$10x^2-30x-40=0 \quad |:10$$
$$x^2-3x-4=0$$
$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm5}{2}=\begin{Bmatrix}4\\-1\end{Bmatrix}$$

Zu $x_1 = 4$ gehört $y_1 = -7$ d.h. S_1 (4 I - 7)
Zu $x_2 = -1$ gehört $y_2 = 8$ d.h. S_2 (- 1 I 8)

Steigung der Strecke MS_1 mit M (- 3 I - 1): $m_1=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{6}{-7}=-\frac{6}{7}$

also Steigung von T_1 : $m_{T,1}=\frac{7}{6}$

Tangente T_1 in S_1 : $y+7=\frac{7}{6}(x-4) \Leftrightarrow y=\frac{7}{6}x-\frac{35}{3}$

Steigung der Strecke MS_2: $m_2=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{9}{2}$

also Steigung von T_1 : $m_{T2}=-\frac{2}{9}$

Tangente T_2 in S_2 : $y-8=-\frac{2}{9}(x+1) \Leftrightarrow y=-\frac{2}{9}x+\frac{70}{9}$

b) Das Dreieck MS_1S_2 ist gleichschenklig, da MS_1und MS_2 gleich lang sind (es sind Radien).

Grundseite des Dreiecks: S_1S_2:

$$\overline{S_1S_2}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{25+225}=\sqrt{250}=5\sqrt{10}$$

Mittelpunkt der Seite S_1S_2 : $F\left(\frac{3}{2}\,|\,\frac{1}{2}\right)$

Die Strecke MF ist die Höhe in diesem Dreieck:

$$\overline{MF}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(3^2+1^2\right)}=\frac{3}{2}\sqrt{10}$$

Dreiecksinhalt: $A=\frac{1}{2}\overline{S_1S_2}\cdot\overline{MF}=\frac{1}{2}\cdot5\sqrt{10}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{10}=\frac{15}{4}\cdot10=\frac{75}{2}=37{,}5$

Innenwinkel: Steigungen der Radien MS_1 : $m_1=-\frac{6}{7}$

und MS_2 : $m_2=\frac{9}{2}$.

Schnittwinkel: $$\tan\gamma^*=\left|\frac{\frac{9}{2}+\frac{6}{7}}{1-\frac{9}{2}\frac{6}{7}}\right|=\left|\frac{\frac{63+12}{14}}{1-\frac{54}{14}}\right|=\left|\frac{\frac{75}{14}}{-\frac{40}{14}}\right|=\frac{75}{14}\cdot\frac{14}{40}=\frac{15}{8}$$

$\gamma^*=61{,}9^o$ und Mittelpunktswinkel $\gamma=180^o-\gamma^*=118{,}1^0$.

Nr. 3:

a) Kreis k: $x^2 + y^2 + 3x - 5y = \frac{15}{4}$

Quadratische Ergänzung: $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{15}{4} + \frac{9}{4} + \frac{25}{4} = \frac{49}{4}$

d.h. $M\left(-\frac{3}{2} \mid \frac{5}{2}\right)$ und $r = \frac{7}{2}$

b) $x^2 + y^2 + 3x - 5y = c$

Quadratische Ergänzung: $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 = c + \frac{9}{4} + \frac{25}{4} = c + \frac{34}{4}$

Bedingung: $r^2 = c + \frac{34}{4} > 0 \Leftrightarrow c > -\frac{17}{2}$

c) Der Kreis mit der Gleichung $(x-t)^2 + (y-2t)^2 = 36$ hat r = 6 und M (t I 2t). Damit der Kreis die x-Achse berührt muß der Mittelpunkt um 6 über oder unter der x-Achse liegen, also muß $y_M = 2t = \pm 6$ sein, d.h. $t = \pm 3$.